

Jürgen Schönbeck (Hrsg.)
Mosaiksteine moderner Schulmathematik

Schriftenreihe der
Pädagogischen Hochschule Heidelberg
Band 51

Herausgegeben von der
Pädagogischen Hochschule Heidelberg

Wissenschaftlicher Beirat
Albrecht Abele, Gerhard Härle, Hans Peter Henecka,
Anette Hettinger, Gerhard Hofsäß, Veronika Strittmatter-Haubold

Mosaiksteine moderner Schulmathematik

Herausgegeben von Jürgen Schönbeck

Werner Ast zum 65. Geburtstag



Mattes Verlag · Heidelberg 2008

Über den Herausgeber:

Jürgen Schönbeck war von 1970 bis 2001 Professor für Mathematik und Didaktik der Mathematik an der Pädagogischen Hochschule Heidelberg.

Bibliographische Information Der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

ISBN 978-3-86809-005-5

© Mattes Verlag 2008

Mattes Verlag GmbH, Tischbeinstraße 62, Postfach 103866, 69028 Heidelberg
Telefon (06221) 437853, 459321, Telefax (06221) 459322
Internet www.mattes.de, E-Mail verlag@mattes.de
Druck: Druck Partner Rübelmann GmbH, Hemsbach

Inhalt

| | |
|-------------------|---|
| Vorwort | 7 |
|-------------------|---|

Bausteine aus dem mathematischen Anfangsunterricht

Reinhard Mauve

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------|----|
| Crazy-Machines – Ein Beispiel zum Problemlösen mit Grundschulern | 11 |
|-------------------------------------------------------------------------------|----|

Daniel Bienia und Andrea Einig

| | |
|----------------------------------------------------------------|----|
| Aktivitäten mit dem SOMA Würfel – Lernen durch Handeln | 27 |
|----------------------------------------------------------------|----|

Sabine Kaufmann

| | |
|---------------------------------------------|----|
| Fermi-Aufgaben in der Grundschule | 41 |
|---------------------------------------------|----|

Christiane Benz

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Das Pascalsche Dreieck – Ein Aufgabenformat für Grund- und Hochschule | 47 |
|------------------------------------------------------------------------------------|----|

Birte Poelstra und Christoph Selter

| | |
|-------------------------------------------------------|----|
| Ein Diagnosebogen zur flexiblen Subtraktion | 63 |
|-------------------------------------------------------|----|

Aspekte der Elementarmathematik in den Sekundarstufen I und II

Gerhard Hofsäß

| | |
|------------------------------------------------------|----|
| Strategienbildung an komplexen Situationen | 79 |
|------------------------------------------------------|----|

Bernd Hafenbrak

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Auswirkungen des Taschenrechners auf das Zahlgefühl von Schülerinnen und Schülern | 101 |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|

Albrecht Abele

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Das Zahlenlotto 6 aus 49 – Erste Erfahrungen mit Wahrscheinlichkeiten | 107 |
|------------------------------------------------------------------------------------|-----|

Jens Holger Lorenz

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Symmetrie – Entwicklung einer mathematischen Idee über dreizehn Schuljahre | 127 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----|

Volker Ulm

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Im Unscheinbaren Tiefe entdecken – Von Quadraten zu Cauchy-Folgen in metrischen Räumen | 137 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|

Angewandte Mathematik und Computereinsatz im Mathematikunterricht

Reinhard Oldenburg

Minimierung der Energie – Ein Thema
für den Mathematikunterricht? 153

Michael Gieding

50 Jahre Wankelmotor – Geometrische Aspekte
eines fächerübergreifenden Schülerprojekts 163

Andreas Filler

Bézier-Kurven und -flächen: eine Verbindung von Geometrie,
Analysis, Informatik und Automobilkonstruktion 179

Mathematik im Wandel

Klaus Volkert

Wie viele Dimensionen hat der Raum – und wie läßt sich
das beschreiben? 199

Horst Struve

Didaktische Probleme der Analysis und ihr historischer Ursprung 213

Charlotte und Jürgen Schönbeck

Der Welsche Gast – Eine didaktische Allegorie
der mathematischen Wissenschaften in einer Heidelberger
Handschrift aus dem 13. Jahrhundert 233

Farbabbildungen 257

Autorinnen und Autoren 273

Vorwort

„Alles was zählt“ – unter diesem weitgespannten und umfassenden Motto steht das Wissenschaftsjahr 2008, das vom Bundesministerium für Bildung und Forschung zum Jahr der Mathematik erklärt wurde. In diesem Zeitraum soll einer breiten Öffentlichkeit die Bedeutung von Mathematik als einer Jahrtausende alten, historisch gewachsenen und gerade in unseren Tagen aktuellen Wissenschaft vorgestellt werden.

Ein solcher Auftrag richtet sich auch an die Pädagogischen Hochschulen. Fast unbemerkt von der Öffentlichkeit findet schon seit einigen Jahren in der Mathematikdidaktik ein Paradigmenwechsel statt, der auf allen Stufen des Mathematikunterrichts bisher unbekannte Perspektiven eröffnet. Er zeigt sich einerseits in der methodischen Neugestaltung traditioneller Inhalte und in der Aufnahme innovativer Unterrichtsgegenstände in das Curriculum, andererseits in der bewußten Hinwendung zu größerer Selbsttätigkeit der Schüler und – damit verbunden – in der Entwicklung schülergemäßer Problemlösestrategien. Er wird erkennbar an verstärktem Einsatz technischer Medien im Unterricht und an fachübergreifenden und fächerverbindenden Fragestellungen. Er benutzt vielfältige, auch neuartige Methoden der Lernerfolgskontrolle und der Leistungsmessung – und er besinnt sich wieder auf die historische Entwicklung und auf die kulturgeschichtlichen Einflüsse von Mathematik.

Mit dem hier vorliegenden Band suchen wir den Dialog zwischen Schule und Hochschule, indem wir – für Lehrende und Lernende – mosaikartig und beispielhaft von solchen für den Unterricht relevanten, ihn neu ausrichtenden Veränderungen berichten.

In sechzehn Beiträgen beschreiben, unabhängig voneinander, neunzehn Autorinnen und Autoren methodische und systematische Projekte aus

- *Arithmetik und Algebra*
- *Geometrie und Analysis*
- *Informatik und Geschichte,*

die in enger Beziehung zum heutigen Mathematikunterricht stehen. Wir stellen damit ganz unterschiedliche mathematikdidaktische Entwürfe *zu verschiedenen Schularten und -stufen* vor: von der ersten bis zur zwölften Klasse, die wir – wobei eine solche Auswahl immer nur einen Teil des Curriculums berücksichtigen kann – um die Schlüsselworte

- *kindgemäßer Anfangsunterricht*
- *problemorientierte Elementarmathematik*
- *computergestützte Anwendungen*
- *historische Wandlungen*

gruppieren. In ihrer so erkennbaren Breite, und weil sich – beabsichtigt – die Beiträge nach Konzeption und Diktion stark voneinander unterscheiden, fügen sie sich ein in ein buntes Mosaik moderner Schulmathematik.

Die ehemaligen und jetzigen Mitglieder des Faches Mathematik (Fakultät für Natur- und Gesellschaftswissenschaften an der Pädagogischen Hochschule Heidelberg), von denen die hier zum ersten Mal veröffentlichten Beiträge verfasst wurden, danken dem Wissenschaftlichen Beirat der Schriftenreihe und dem Freundeskreis der Hochschule für ideelle und materielle Unterstützung bei der Vorbereitung und Durchführung dieser Publikation. Ein ganz persönliches Dankeswort des Herausgebers gilt dem Verleger Herrn Mattes vom Mattes Verlag Heidelberg für seine jederzeit hilfreiche Beratung. – Insbesondere aber und vor allem Anderen sei der eigentliche, uns leitende Anlass genannt, der zu dieser gemeinsamen Veröffentlichung zum jetzigen Zeitpunkt geführt hat:

Zum Entwurf und zur Entwicklung der beschriebenen Mosaikbausteine haben die Autorinnen und Autoren auch während ihrer Tätigkeit an der Pädagogischen Hochschule Heidelberg beigetragen. Dies geschah in wechselseitiger Anteilnahme und in reger Zusammenarbeit – oft über das Fachliche noch hinausgehend – mit dem Mathematikdidaktiker Prof. Dr. Werner Ast, der seit 1972 als Hochschul-lehrer für Mathematik und ihre Didaktik an der Pädagogischen Hochschule Heidelberg tätig ist: sowohl in Forschung und Lehre und in der schulpraktischen Ausbildung zukünftiger Lehrerinnen und Lehrer als auch in leitenden Positionen der Selbstverwaltung. Ihm, dem Kollegen und Freund aus mehr als drei Jahrzehnten, sei als Dank für gemeinsam zurückgelegte Wege dieser neue Band zur Heidelberger Mathematikdidaktik gewidmet: aus Anlaß seines 65. Geburtstages im Jahr 2008 – unter dem aktuellen Motto:

ALLES WAS ZÄHLT.

Heidelberg, im Frühjahr 2008

Jürgen Schönbeck

Bausteine aus dem mathematischen Anfangsunterricht

Reinhard Mauve
Pädagogische Hochschule Heidelberg

Crazy Machines – Ein Beispiel zum Problemlösen mit Grundschulern

Summary

Crazy Machines is a computer program that allows both children and adults to practice their problems solving skills. In the first section, Crazy Machines is introduced with an emphasis on its use for teaching problem solving. It will be shown that Crazy Machines is an excellent teaching environment for active and explorative education. The second part includes experiences, observations, and deliberations regarding an experimental lecture with Crazy Machines. Besides examples for problem solving, it will also be explored how the software can be used for producing own problems. The topic covered in this chapter might be a starting point for further research on teaching problem solving at an elementary school level.

Einleitung

Die folgenden Ausführungen betreffen einen Problemlösekurs für 6-jährige Kinder, dessen erste Phase abgeschlossen ist und der sich über vier Jahre erstrecken soll. Ein Ausgangspunkt für diesen „Kinderkurs“ war der Wunsch nach Beobachtungen und praktischen Erfahrungen zum Problemlösen und Problemlöselernen von Kindern. Für die Gestaltung eines solchen Kurses waren zwei bekannte, klassische Ansätze zum Problemlöselernen besonders bedeutsam:

Georg Polya gilt als der Klassiker des Problemlöselernens. Er sagt: „Das Lösen von Aufgaben ist eine praktische Kunst wie Schwimmen oder Skilaufen oder Klavierspielen: Sie lässt sich nur durch Nachahmung und Übung erlernen.“

„Wer schwimmen lernen will, muss ins Wasser gehen, und wer Aufgaben lösen lernen will, muss Aufgaben lösen.“

„Will man möglichst viel Nutzen aus seinen Bemühungen ziehen, so achte man bei der Bearbeitung jeder Aufgabe auf solche Züge, die bei der Behandlung späterer Aufgaben nützlich sein könnten“ (Polya 1966).

Beim aktiv entdeckenden Lernen wird das Kind in problemhaltige Situationen versetzt, zu eigenen Aktivitäten und Lösungsansätzen ermutigt und ggf. Hilfe zum Selbstfinden angeboten. Nicht „Darbieten und Entwickeln“ sondern „Veranlassung der Gelegenheit und Anregung zur eigenen Ent-

wicklung“ sind die zentralen Stichworte. Aufgabe des Lehrers ist nicht ein Darbieten oder sogar ein Vormachen, sondern die Bereitstellung günstiger Lernumgebungen für selbstständiges Lernen (Wittmann 1995).

Übereinstimmend betonen alle Autoren: Problemlösen lernt man nur durch das Lösen von Problemen (*aktives Lernen*) und durch ein Nachdenken über das eigene Vorgehen (*Metakognition*).

Für den Kinderkurs wurde bei Berücksichtigung der obigen Ansätze die Lernumgebung Crazy Machines (CM) gewählt. Bei CM handelt es sich um eine Simulationssoftware, die kindgemäßes Problemlösen in einem elementaren technisch-physikalischen Kontext unterstützt. CM verlangt einen hohen Grad an Selbsttätigkeit, bezieht sich auf bedeutsame Sachkontexte, ist sehr motivierend und kinderleicht zu bedienen (vgl. Crazy Machines 2006).

Meine Ausführungen enthalten im ersten Teil allgemeine Aussagen zum Thema Crazy Machines und Problemlösen. Der zweite Teil bezieht sich auf Erfahrungen aus dem Kinderkurs.

1 Crazy Machines

Ich beschränke mich hier auf kurze Hinweise zu Crazy Machines, die für eine Diskussion des Zusammenhangs mit dem Problemlöselernen ausreichen. Für eine detaillierte Beschreibung aus pädagogischer Sicht vergleiche man den Artikel „Pädagogische Aspekte des Computerspiels Crazy Machines“ (Callies 2004).

1.1 Ein Beispiel

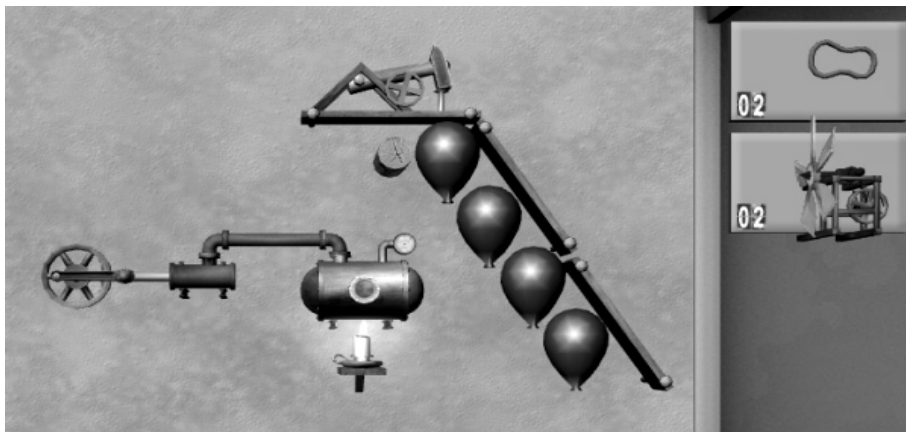


Abb. 1: Problem 39 (vgl. Farbbild 1)

Abbildung 1 zeigt das Problem 39 aus der CM-Sammlung. Der Bildschirm des Computers lässt eine einfache Gliederung erkennen. Einige Elemente einer „Maschine“ (Kerze, Dampfmaschine, Hammerwerk und Ballons) sind links auf der Arbeitsfläche fest vorgegeben. In der rechten „Elementspalte“ befinden sich bewegliche Elemente (2 Antriebsbänder, 2 Windmühlen), die mit der Maus auf die Arbeitsfläche gezogen und zu einer funktionierenden Maschine verarbeitet werden können.

Kinder mit einigen CM-Erfahrungen wissen was zu tun ist. Ängstliche Erwachsene holen sich folgende Anweisungen: „Du kennst Dampfmaschinen mit einem Antriebsrad. Und eine Hammermaschine, die einen Nagel durch das Brett schlagen kann. Nun sind da noch Luftballons, die alle zerplatzen sollen. Baue die Ballon-Zerplatzmaschine fertig. Dazu hast Du zwei Windmühlen und zwei Antriebsbänder.“

Es gibt viele Lösungen für Problem 39. Die nachstehenden Bilder zeigen zwei davon. Links eine kurze und einfache Lösung, die nicht alle zur Verfügung stehenden Elemente benutzt. Die komplexere Lösung rechts nutzt alle Elemente und verwendet die Doppelfunktion von Windmühlen als Winderzeuger und als Energieerzeuger.

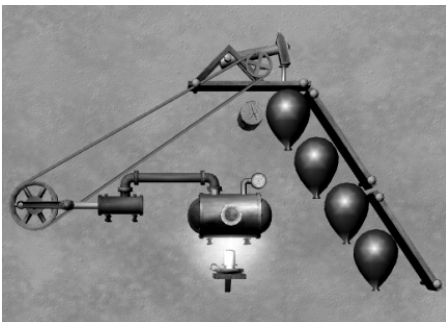


Abb. 2: Lösung zu Problem 39

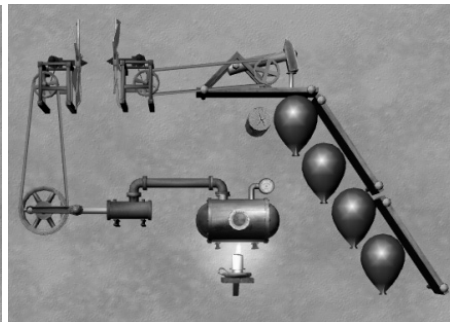


Abb. 3: Lösung zu Problem 39

1.2 CM-Probleme

CM-Probleme sind Sequenzen von CM-Elementen, die zu einer „Maschine“ mit einer bestimmten Funktion zusammengebaut werden sollen. Dabei gibt es fest vorgegebene Elemente auf der Arbeitsfläche und beweglich verfügbare in der Elementleiste.

Lösungen von CM-Problemen und ihren Teilproblemen lassen sich durch Aktivieren der Maschine überprüfen. CM-Probleme können mehrere Lösungen haben, die unterschiedlich komplex sind.

Die Elemente von CM-Problemen entstehen durch Simulation von Objekten aus unserem Alltagsumfeld und aus physikalisch-technischen Sammlungen. Die Elemente werden als Blackbox-Objekte so vorgestellt, dass mit ihnen ohne weitere Vorkenntnisse gearbeitet werden kann.

Aus CM-Elementen kann man wirklichkeitsnahe Maschinen konstruieren, aber auch Phantasiemaschinen, die nicht selten skurril wirken und an Spielzeugkonstruktionen wie Kugelbahnen und Bausteinburgen erinnern. Letzteres aber macht oft gerade ihren Reiz für einen kindlichen Problemlöser aus. Gute CM-Probleme wirken wie Knobelaufgaben und sprechen die Lust am Funktionieren komplexer, nicht notwendig nützlicher technischer Konstruktionen an. CM-Freunde würden ihr „Arbeitsgebiet“ vielleicht auf der Grenze zwischen Technik und Kunst ansiedeln.

1.3 Lösen von CM-Problemen

CM ist eine günstige Lernumgebung zum Problemlösen, weil es eine reichhaltige Vielfalt von Problemen und Problemlöseaktivitäten anbietet:

Hilfreich ist immer eine *Analyse* der Funktionsoptionen von Elementen und Elementgruppen. Zur Lösung von Problem 39 ist es z.B. nützlich, die beiden Funktionen von Windmühlen zu kennen: Winderzeugung und Energieerzeugung.

Zentrale Lösungsaktivität ist das *Experimentieren*. In jeder Lösungsphase kann man die bis dahin konstruierte Maschine aktivieren. Dann ist erkennbar, ob und wie weit man einer Lösung näher gekommen ist und welcher Schritt ggf. als nächster sinnvoll wäre.

Eine *Zerlegung in Teilprobleme* ist bei CM-Problemen gegeben durch sinnvolle Teilsequenzen von Elementen, die bereits einen Teil der gewünschten Funktion der Gesamtmaschine haben. Beim Problem 39 wird man etwa versuchen, erst einmal eine Windmühle in Aktion zu bringen.

Vorwärtsarbeiten, ausgehend von Anfangselementen, und *Rückwärtsarbeiten* von den Endelementen der Sequenz sind oft erfolgreiche Strategien. Beim Problem 39 würde man dann etwa eine der Windmühlen mit der Dampfmaschine (vorwärts) und eine mit der Hammermaschine (rückwärts) mit Antriebsbändern verbinden. Experimentieren könnte dann die Lösungsidee nahe legen: Die erste Windmühle erzeugt Wind, mit dem die zweite Windmühle und damit das Hammerwerk angetrieben werden.

Mit wachsender Erfahrung wird der Problemlöser immer mehr auf Maschinen treffen, deren Aufbau schon bekannten Maschinen ähnlich ist. Dann sind *Analogiebetrachtungen* hilfreich. Man kann z.B. statt einer Dampfmaschine auch einen Elektromotor nutzen, um Drehbewegungen zu erzeugen. Auch muss man nicht eine Hammermaschine antreiben, sondern kann analog auch ein Förderband oder eine Grillwurstdrehanlage in Gang setzen.

1.4 Bearbeiten von CM-Problemen

Neben dem Lösen von vielen „guten Problemen“ ist zum Problemlöselernen auch das Nachdenken über den Problemlöseprozess bedeutsam. Bei jüngeren Schülern stößt aber eine Aufforderung zu einer Rückbesinnung („Was haben wir gemacht?“) nur selten auf motivierendes Verständnis. Hier bieten sich Eigenproduktionen als kindgemäßer Ersatz an: Durch den Übergang in einen Editor kann man aus jedem Problem eine „Problembaustelle“ machen. Dann stehen alle Elemente beweglich zur Verfügung und können auf Arbeitsfläche und Elementleiste frei verteilt werden. Außerdem können aus den CM-Baukästen neue Elemente hinzugefügt werden.

Grundlegende Aktivität ist dabei zunächst ein *Nachkonstruieren*. Der Schüler wird aufgefordert, die eben gefundene Maschine auf einer leeren Arbeitsfläche vollständig neu aufzubauen. Dadurch wird er angeregt, sich an einzelne Lösungsschritte zu erinnern und sie erneut zu einer funktionierenden Gesamtlösung zusammen zu setzen. Zugleich regt die Beweglichkeit aller Elemente im Editiermodus zu ersten *Variationen der Lage* an. Es können dabei alte Lösungen verloren gehen und neue Lösungen entstehen.

Besonders reizvoll ist eine *Variation der Verteilung* von Elementen zwischen Arbeitsfläche und Elementspalte. Durch Verlegung von Elementen der Arbeitsfläche in die Elementleiste wird das Problem in der Regel anspruchsvoller, weil die Lücken in den Sequenzen vergrößert werden. Durch die umgekehrte Vorgehensweise erhält man ein leichteres Problem, weil mehr von einer Lösung verraten wird. Dieser Vorgang gibt nicht selten Anlässe zum *Abbau verfestigter Vorstellungen* und zu *beweglichem Denken*.

Wenn man z. B. in Problem 39 die Kerze in die Elementleiste versetzt (Abb. 4), wird die Situation für eine völlig neue Lösung geöffnet (Abb. 5). Die Ballons zerplatzen wegen der Hitze der Kerze. Die Dampfmaschine und das Hammerwerk mit dem Nagel werden zur Lösung des Problems nicht benutzt.

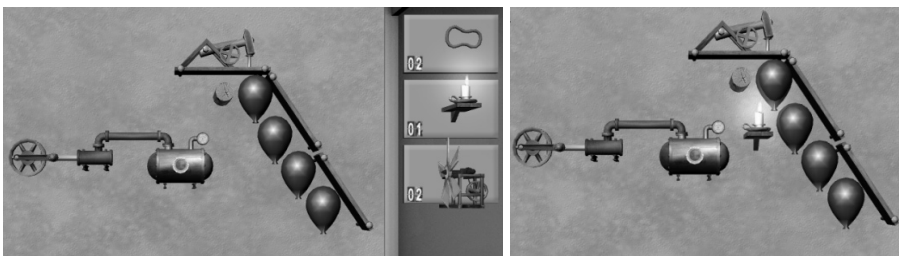


Abb. 4: Neue Elementverteilung

Abb. 5: Neue Lösung

Die Option *Hinzufügen neuer Elemente* gestattet es, das Problem weitgehend kreativ abzuändern. Der Konstrukteur gibt das Ausgangsproblem frei zur Erzeugung von mehr oder weniger verwandten Problemen. Er kann dabei die „Elementkisten“ von CM öffnen und auf mehr als 80 Elemente zugreifen. Bei Problem 39 z.B. kann der Bearbeiter andere Übertragungsmechanismen zwischen Dampfmaschine und Hammermaschine einfügen, etwa einen Stromgenerator und einen Elektromotor. Die Eingabeelemente (Dampfmaschine mit der Kerze) kann er ersetzen durch eine Solarzelle, die aus dem Licht einer Lampe Strom für einen Motor erzeugt (Abb. 7).

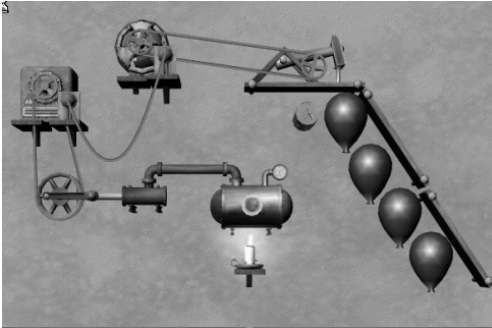


Abb. 6: Neue Übertragungselemente

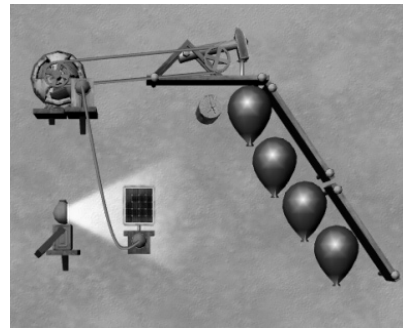


Abb. 7: Neue Eingabelemente

Schließlich ist es auch möglich, die Ausgabemaschine durch andere Einheiten zu ersetzen. In Abbildung 8 wurde die Hammermaschine mit den Ballons aus Problem 39 durch Förderbänder ersetzt, die eine Kiste transportieren sollen.

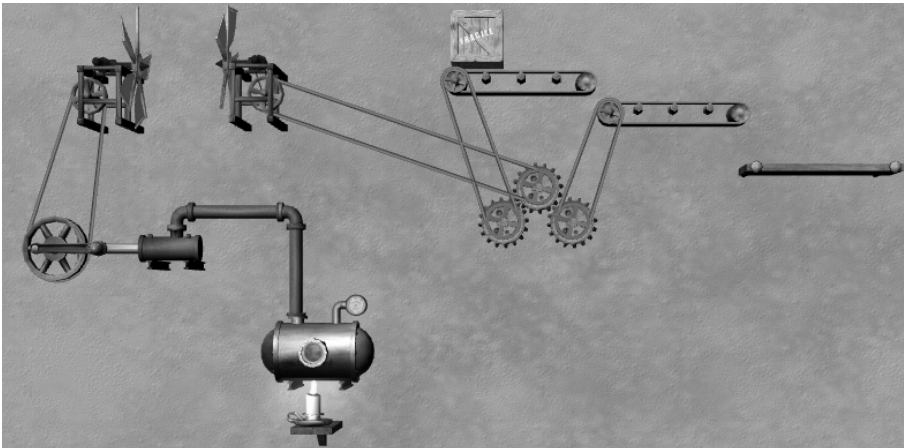


Abb. 8: Neue Ausgabelemente

2 Beobachtungen und Erfahrungen

Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf einen halbjährigen Kurs mit einer kleinen Gruppe von Mädchen und Jungen aus einer ersten Klasse. In wöchentlichen Treffen im Umfang von 2 Schulstunden wurde das Thema „Problemlösen mit dem Computer“ behandelt. Zentral war dabei die Beschäftigung mit Crazy Machines.

Jede Einheit begann und endete mit einer kleinen Konferenz, während in der Hauptzeit dazwischen in Zweiergruppen an jeweils einem Computer gearbeitet wurde. Es waren immer auch die Eltern zur Teilnahme eingeladen.

Die folgenden Erfahrungen und Beobachtungen sind sicher nicht repräsentativ für Kinder dieses Alters. Sie können allenfalls als Anregungen zum Nachdenken über das Problemlöseverhalten von Schulanfängern angesehen werden.

2.1 Motivation

Durch die äußere Gestaltung (Grafik, Sound) wirkte CM von Anfang an motivierend auf die Kinder. Für eine durchgehende Motivation spielten aber daneben andere Aspekte eine wichtige Rolle:

- der hohe Grad an *Manipulierbarkeit der CM-Elemente*
- die auf Kinder gut *abgestimmte CM-Problempfolge*
- die *Funktionsweise von CM-Maschinen*
- die *Optionen zu Eigenproduktionen*.

Die Kinder konnten CM-Elemente mit der Maus auf der Arbeitsfläche frei bewegen und sie zu Funktions-Gruppen zusammenfügen. Dies ist ein virtuell-handlungsorientiertes Vorgehen, das der Alterstufe entspricht. Dabei waren unterschiedliche Handlungstypen beobachtbar:

- Kinder, die vorsichtig – z. T. nach längeren Vorüberlegungen – aktiv wurden und auch dann ängstlich auf richtiges Vorgehen bedacht waren. Sie wollten die Gesamtlösung in einem Zug konstruieren und keinesfalls unsichere Versuche wagen.
- Davon unterschieden sich deutlich Kinder, die unverzüglich und nicht selten ein wenig planlos CM-Elemente auf der Arbeitsfläche bewegten, eine Vielzahl von Kombinationen ausprobierten, dabei Fehler riskierten und dann erst mit strategischen Überlegungen begannen.

Die Familienversion von CM bietet den Kindern eine durchdachte Problemsequenz an. In sehr einfachen Aufgaben wurden die Kinder mit den Elementen vertraut gemacht, bevor dann komplexere Probleme gestellt werden konnten. Diese sich steigenden Ansprüche verhinderten Resignation und steigerten die Spannung. Dennoch war in einigen Situationen ein ermutigender Zuspruch (vom Lehrer) hilfreich.

Immer wieder fasziniert waren Kinder, eine komplexere CM-Maschine in Aktion zu sehen. Als besonders anregend erwiesen sich dabei Fehlfunktionen, die nicht erwartet und geplant waren. Es empfiehlt sich, die Kinder die erwartete Funktionsweise voraussagen und ggf. die Ursachen einer Fehlfunktion vermuten zu lassen.

Schließlich war für die Kinder besonders reizvoll, aus den „Elementkisten“ im Editor Elemente heraus zu holen und zu neuen Maschinen zusammen zu setzen. Dabei sollten zunächst nur bekannte Elemente zugelassen werden. Nicht selten erfanden Kinder Phantasiemaschinen, wobei ihnen an einem Wirklichkeitsbezug wenig gelegen war. Natürlich reizte sie auch alles, was zusammenstößt und knallt oder explodiert.

2.2 Experimentieren

Die Kinder verhielten sich bzgl. des Experimentierens durchaus unterschiedlich. Im Extrem konnte man experimentierängstliche von experimentierfreudigen Kindern unterscheiden. Dabei wird nicht überraschen, dass es sich genau um die beiden Typen aus dem Abschnitt über Motivation handelte.

- *Experimentierängstliche Kinder* überlegen und planen gründlich. Sie behalten das Gesamtziel im Blick. Dann versuchen sie in einer einzigen Konstruktionsphase die gesamte Maschine zu erstellen. Schließlich dient ein Abschlussexperiment der Überprüfung ihrer Lösung. Wenn – was oft vorkommt – die Maschine das Problem nicht löst, fangen solche Kinder nicht selten ganz von vorne an. Fehler bedeuten für diese Kinder oft ein Versagen. So wollten sie im Kinderkurs z.B. nicht bei ihren Misserfolgen fotografiert werden.
- *Experimentierfreudige Kinder* beginnen schon mit einem Aktivieren der Ausgangssituation. Nach jeder der beiden CM-Aktionen „Hinzufügen von Elementen“ und „Lagevariation von Elementen“ wird die neue Situation ausprobiert. Dabei werden Fehler und Ungenauigkeiten sofort durch Fehlfunktionen entlarvt. Korrekturen und Feineinstellungen werden vorgenommen. Allerdings verlieren diese Kinder das noch entfernt liegende Ziel manchmal zeitweise aus den Augen zugunsten eines nächsten Schritts, der zwar zu einer funktionierenden Maschine führt, aber nur wenig zur Problemlösung beiträgt.

Bei Experimenten zur Variation der Lage von Elementen war eine interessante Entwicklung zu beobachten: In zahlreichen Problemstellungen zeigte ein Experiment, dass ein Element (z.B. ein Ball oder ein Klotz) für eine Lösung durchaus brauchbar, aber noch nicht richtig plaziert war. Erfahrene Problemlöser werden in solchen Situationen durch systematisches Probieren versuchen, sich der Lösung zu nähern. Dieses Vorgehen stellte sich bei den Kindern erst nach vielen Experimenten und gelegentlichen Hilfen ein. Zunächst jedenfalls begannen einige Kinder mit einem völligen Neuaufbau der

Situation und hofften, diesmal die richtige Lage in einem Zug zu erreichen. Die systematisch-strategische Nutzung von Fehlversuchen und ganz allgemein der produktive Umgang mit Fehlern ist für einige Grundschul Kinder durchaus nicht nahe liegend.

Im Verlauf des Kurses näherten sich die Kinder in ihrem Experimentierverhalten einander an, weil alle schnell merkten, dass planvolles Experimentieren eine günstige – in vielen Situationen sogar unverzichtbare – Lösungsstrategie ist. Diese Vereinheitlichung wurde auch dadurch verstärkt, dass die Kursleiter in den Problemlöseprozess eingriffen: Einerseits forderten sie immer wieder dazu auf, doch einmal etwas auszuprobieren. Andererseits fragten sie zunehmend vor einem Experiment nach dem erwarteten Ergebnis. Die Kinder experimentierten dadurch häufiger und zielgerichteter.

Zum Experimentieren und der Rolle der Kursleiter sei auf das folgende kleine Interview verwiesen. Daran soll u. a. verdeutlicht werden, wie gedankenloses Agieren durch eine Phase der Vorbesinnung verhindert wurde. Zugleich kann man daran sehen, dass trotz einer Bemühung um aktiv entdeckendes selbständiges Lernen der Lehrer eine wichtige Rolle übernommen hat.

2.3 Ein kleines Interview

Imd ist ein 7-jähriger Erstklässler. Er hat den Spitznamen „Ich-Mach-Das!“, weil er in Handlungssituationen – insbesondere am Computer – immer „Ich mach das!“ ruft. Imd sitzt mit dem Kursleiter L vor einem CM-Problem mit festen Brettern und Holzbalken sowie beweglichen Bällen und Dominosteinen (Abb. 9). Er hat schon einige Erfahrungen mit Crazy Machines.

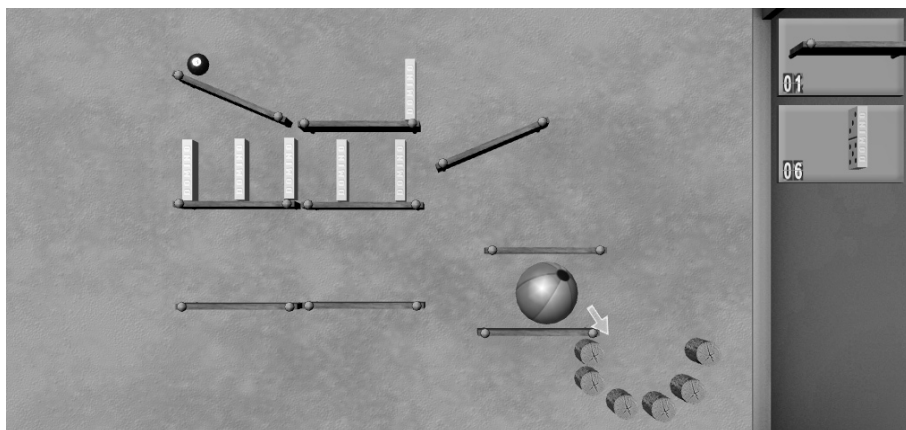


Abb. 9: Problem 17 (vgl. Farbbild 2)

- L: Was soll hier gemacht werden? (Zeigt auf Abb. 9.)
- Imd: Der Ball soll in den Korb! (Zeigt auf den Ball rechts unten.)
- L: Wie geht das?
- Imd: Mit der Kugel da oben. (Zeigt auf die Kugel links oben.)
Ich mach das!
- L: Halt! Wir wollen das mal im Kopf machen. (Nimmt Imds Hand von der Maus.)
Was passiert, wenn die Kugel rollt?
- Imd: Der Domino fällt runter. (Zeigt auf den einzelnen Dominostein rechts oben.)
- L: Und dann fällt der Ball in den Korb?
- Imd: Nein, alle Dominosteine fallen auch um. (Hat den Trick offensichtlich erkannt.)
- L: (Schweigt und kämpft mit Imd um die Maus.)
- Imd: Dann bau ich das auch so auf, aber auf der anderen Seite.
- L: Ich verrate Dir was: Der letzte Stein fällt dann durch die Lücke.
- Imd: (Schaut genau hin, zählt die Steine, die er braucht.)
Fünf. Da ist ein Stein zuviel. (Zeigt auf die Elementleiste rechts.)
- L: Na und?
- Imd: Der tut den Ball in den Korb.
- L: Wie? Versuchs mal! (Gibt die Maus frei für Imd.)
- Imd: (Experimentiert lange und setzt den Dominostein neben den Ball.)
Da muss er hin!

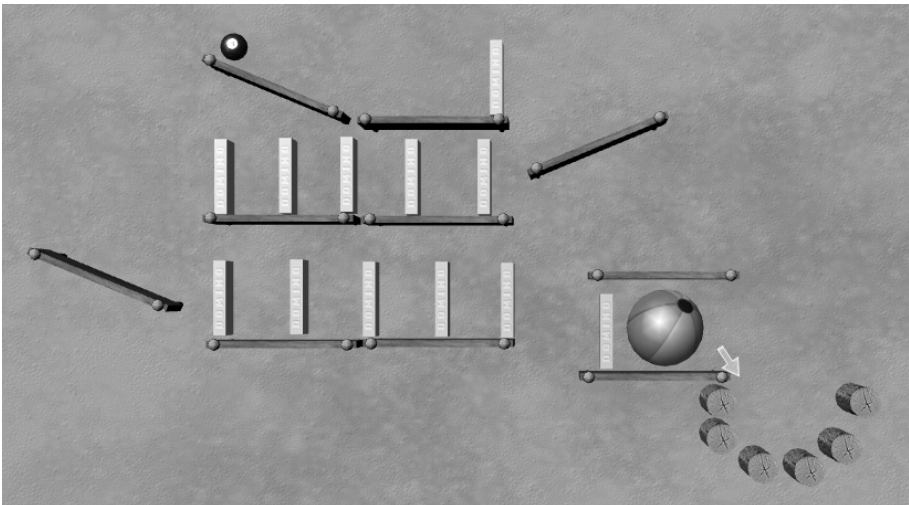


Abb. 10: Lösung zu Problem 17

2.4 Eigenproduktionen

Dem Lösen eines CM-Problemen schloss sich oft eine Produktivphase an, die in drei Stufen gegliedert war:

- *Nachbau* der Situation zu dem schon gelösten Problem
- *Umbau* der Maschine nach eigenen Einfällen
- *Ergänzungen* durch neue Elemente.

Nachbauversuche zu einem Problem und einer Lösung ließen immer deutlich erkennen, wie gut das Problem und seine Lösung verstanden wurden. Einige Kinder konnten die ganze Situation aus dem Gedächtnis nachkonstruieren. Dabei war erneut zu erkennen, wie bedeutsam, neben der Gesamtstruktur, auch die Justierung der Lage einzelner Elemente ist.

Der *Umbau gegebener Situationen* führte die Kinder nicht selten zu kürzeren und einfacheren Lösungen. Beim Problem 17 (Abb. 9) wurden z.B. alle Elemente außerhalb der Ziel-Situation „Ball auf dem Brett und Korb“ frei beweglich zur Verfügung gestellt. Die Kinder produzierten eine Fülle von Lösungen (Abb. 11 - Abb. 14), über die eine lebhafte Diskussion entstand.

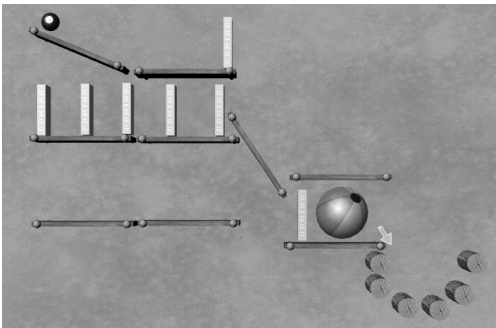


Abb. 11: Umbau Problem 17

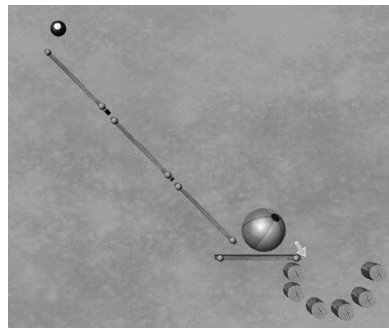


Abb. 12: Umbau Problem 17

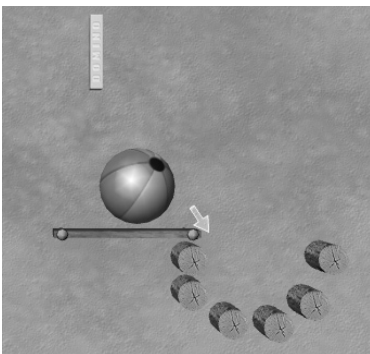


Abb. 13: Umbau Problem 17

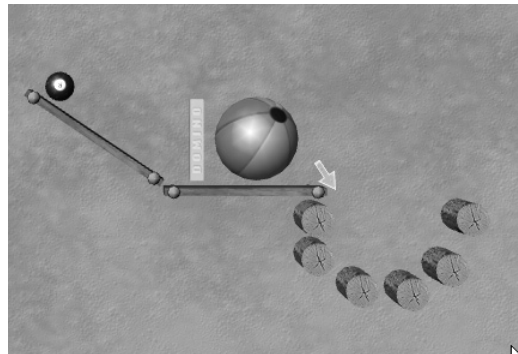


Abb. 14: Umbau Problem 17

Wenn eine *Ergänzung durch neue Elemente* zugelassen wurde, ergaben sich nicht selten eigenwillige Konstruktionen, die weit von den Anfangsgegebenheiten entfernt waren. Die Kinder ließen ihren Vorlieben und Ideen freien Raum. Dabei galt die Endsituation „Ball in den Korb“ als akzeptiert und unantastbar. Da die Kinder die Dominoreihe ohnehin als „Schikane“ empfanden, suchten sie nach neuen und eleganteren „Stoßmechanismen“. Sie fanden dafür in den Kisten von CM zahlreiche Materialien, von denen die Kanone (Abb. 15) und der Miniroboter (Abb. 16) besonders beliebt waren.

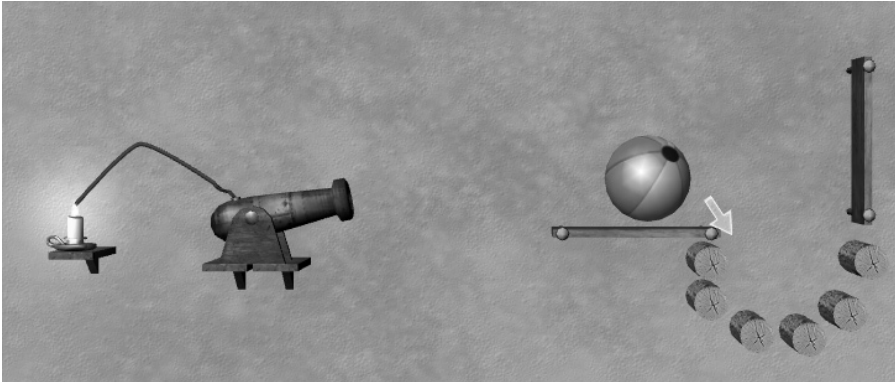


Abb. 15: Kanone

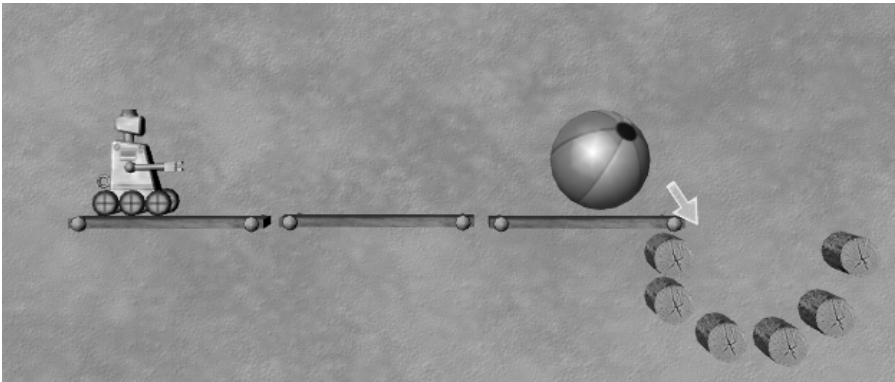


Abb. 16: Miniroboter

Auch der Springfrosch, der Hammer, der von einem Magneten angezogene Metallnagel, die Windmühle und sogar ein Minizeppelin stießen den Ball in den Korb. Selbst eine Kiste, die über ein Förderband herangebracht wurde, schaffte es. Die Schüler wetteiferten um immer neue Lösungen. An all diese Analogien konnte man sich bei späteren Problemen erinnern und sie wirksam nutzen. Die Kinder erkannten, wie das *Mutterproblem* „Einen Gegenstand in Bewegung setzen“ in vielen Variationen gelöst werden kann.

2.5 Kommunikatives Problemlösen

Die Kinder lösten CM-Probleme am Computer in wechselnden Zweiergruppen. Dadurch kam es zu intensiven Auseinandersetzungen über Lösungsideen, woran sich nicht selten ein „Kampf um die Maus“ anschloss. Die Kursleiter und oft auch die Eltern standen zur Beratung und Hilfe zur Verfügung.

Die meisten Gespräche am Bildschirm betrafen geplante und schon realisierte Lösungsschritte. So ergaben sich ungezwungen Anfänge eines Nachdenkens über den Lösungsprozess. Das fortwährende Überprüfen von vermuteten Lösungsschritten durch „Ausprobieren“ erwies sich als wichtige Hilfe und als Anlass zu weiteren Absprachen. Da die Eltern keinen Informationsvorsprung bzgl. CM hatten, konnten sie als Partner im Bemühen um eine Lösung akzeptiert werden. Es zeigte sich sogar immer wieder, dass die Kinder weniger ängstlich und auch mit mehr Erfolg an die Probleme herangingen als die Erwachsenen.

Wiederholt gab es auch Diskussionen über die Gestaltung der Lösung oder Varianten für Lösungsschritte. Kurze, einfache Lösungen scheinen für einige Kinder ein weniger erstrebenswertes Ziel darzustellen. Sie freuen sich eher über komplizierte und spektakuläre Abläufe.

Die offeneren produktiven Phasen führten oft zu sehr unterschiedlichen Vorschlägen, die auch in mehrere alternative Lösungen einmündeten. Insgesamt wurde sehr deutlich, dass man durchaus auch allein CM-Probleme lösen kann. Für ein Problemlöselernen aber ist das Arbeiten in Kleingruppen sehr viel günstiger.

Einer Phase der Partnerarbeit an mehreren ähnlichen Problemen schloss sich jeweils eine Konferenz an. Sie diente der gegenseitigen Information zwischen den Zweiergruppen und wurde von den Kursleitern bewusst auf strategische Aspekte gelenkt. Die Sechsjährigen sollten anhand von Fotos der Maschinen ihr Vorgehen noch einmal beschreiben. Es war für sie auch mit dieser Hilfe durchaus nicht einfach, eine solche Vorgangsbeschreibung zu geben. Die Linearität von CM-Maschinen stellte dabei eine große Hilfe dar. Die Kinder nannten einfach der Reihe nach alle Maschinenteile.

2.6 Sachanalyse beim Problemlösen

Für das Lösen von CM-Problemen ist es wichtig, die Bausteine zu kennen und ihre Funktionsoptionen nutzen zu können. Diese Bausteine sind Simulationen von Gegenständen aus der physikalisch-technischen Alltagswelt. Ihre Namen, ihre Darstellungen und ihre Funktionen werden im Kontext der Aufgabenstellungen erklärt und in Experimenten erfahren. Den Kindern genügen diese Erklärungen auf der Simulationsebene, um die Probleme zu bearbeiten. Im Interesse einer physikalisch-technischen Grundbildung wurde aber im Kinderkurs immer wieder der Versuch gemacht, von der Simulation in die Wirklichkeit zurück zu kommen. Solche Konkretisierungen waren Thema einiger Konferenzen. Für zahlreiche Elemente waren die Gegenstände

de den Schülern aus dem Alltag vertraut. Es konnten sogar einige Probleme handelnd gelöst werden, weil die Elemente (Klötze, Bälle, Dominosteine) mitgebracht wurden.

Bei weniger bekannten Elementen konnte immer wieder im Gespräch an Erfahrungen und Vorstellungen der Kinder angeknüpft werden.

Beispiele dafür:

- Bei den Windmühlen boten sich Ventilatoren und die Windkrafträder an. Ventilatoren sind bekannte Beispiele für „Winderzeuger“ und Windkrafträder sind Energieerzeuger. Gerade diese beiden Eigenschaften sind für CM-Windmühlen kennzeichnend und werden z.B. bei Problem 39 genutzt.
- Bei der Dampfmaschine konnte mit Bildern ein Bezug zur Dampflokomotive hergestellt werden, die den Kindern allerdings auch nur wenig vertraut war.
- Elektromotoren kannten viele Kinder aus Spielzeugautos und Spielzeugschiffen.
- Mit einem Brennglas wurde eine Zeitung angezündet.
- Der Miniroboter war Thema mehrerer Einheiten im Kontext mit dem Lego-Mindstroms-Roboter.
- In zahlreichen Experimenten wurden Dominosteinketten umgekippt und lösten dadurch weitere Vorgänge aus.
- Für ein Verständnis der Funktion von Zahnrädern wurde das Spiel „Chaos in der Geisterbahn; Das Ratter-Knatter-Zahnradspiel“ (Ravensburg) eingesetzt.

Insgesamt ist das Lösen von CM-Problemen zugleich auch eine gute Gelegenheit, bei den Kindern ein Interesse für physikalisch-technische Vorgänge zu wecken. Es ist nicht verwunderlich, dass an einigen Schulen gerade die Physiklehrer mit CM arbeiten.

Schluß

Crazy Machines ist eine günstige Problemlöse-Lernumgebung für alle Altersstufen. Es bietet dem Spieler motivierende und im Schwierigkeitsgrad abgestufte Probleme und regt ihn zu beweglichem Denken an.

Grundschul Kinder können ohne umfangreiche Einweisung in CM einsteigen, an vielfältigen Aufgaben Lösungsversuche machen und dabei strategische Grunderfahrungen sammeln. Ganz nebenbei wird ihr Interesse an physikalisch-technischen Situationen gefördert.

Übertragungsprozesse finden beim Strategielernen bekanntlich nicht automatisch statt, sondern bedürfen zusätzlicher Bemühungen. Was nützen also etwa die in CM erworbenen Strategien für das Problemlösen in der Mathematik? Sie sind sicher nur als bewusst anzusprechende Analogie zu bewerten. Bei der Strategie des systematischen Probierens sind solche Ähn-

lichkeiten besonders auffällig. „Was ist, wenn...“-Probleme beim Einsatz von Tabellenkalkulationsprogrammen in der Mathematik sind mit vielen Experimentiersituationen in CM offensichtlich eng verwandt.

Dagegen kann CM für die in der Mathematik so bedeutsamen Modellierungsprozesse keinen Beitrag liefern: CM-Probleme sind schon durch Simulation modelliert. Also entsprechen CM-Problemlösungen nur der mathematischen Lösung eines Problems im Modell. Bei einer solchen Beschränkung können allerdings zentrale Strategien wie Analyse der Gegebenheiten, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten sehr wohl miteinander verglichen werden. Für Grundschul Kinder erscheint wohl zunächst nur wichtig, dass ähnliche strategische Vorgehensweisen in unterschiedlichen Sachgebieten ausgeübt werden.

Zwischen den Positionen „Lernen durch Nachahmung“ (Polya) und „Lernen durch selbständiges aktives Entdecken“ (Wittmann) besteht beim Problemlösen mit CM kein unauflösbarer Gegensatz, sondern eher ein sich ergänzendes Nebeneinander. „Wie hast Du das gemacht? Ich mach das auch so!“ und „Ich mach das! Lass uns das mal versuchen!“ wechselten im Kinderkurs ab. Die Rolle des Lehrers beim Problemlöselernen geht jedenfalls über ein reines Bereitstellen und Organisieren von Lernchancen und Lernumgebungen weit hinaus. Gerade bei Konferenzen zum Nachdenken über das eigene Tun der Kinder ist eine rücksichtsvolle und zurückhaltende Hilfe des Lehrers wünschenswert. Sogar für die Lehrstrategie „Vormachen und Nachmachen“ kann es beim Problemlöselernen durchaus angemessene Gelegenheiten geben.

Die Grunderfahrungen beim Problemlösen sind das „Versetzt sein in eine Problemsituation“ und die „Notwendigkeit zur aktiven Überwindung von Lösungswiderständen“. Beide Erfahrungen werden in CM immer wieder in steigender Intensität angesprochen. Aushalten solcher Situationen, Mut zu Aktivitäten, Enttäuschung bei Misserfolgen und Freude auch über kleine Erfolge sind Aspekte, die man bei Crazy Machines genauso kennen lernen kann wie beim Problemlösen in anderen Bereichen. Vielleicht ist CM sogar eine besonders günstige Umgebung dafür, weil dabei kindgemäßes Spielen und Experimentieren im Mittelpunkt stehen.

Literatur und Software

- Callies, F. E. (2004). *Pädagogische Aspekte des Computerspiels Crazy Machines*. <http://www.computerlernen.de>
- Crazy Machines (2006). *Der total verrückte Täufelspaß*. Hamburg.
- Polya, G. (1966). *Vom Lösen mathematischer Aufgaben, Band 1. Einsicht und Entdeckung – Lehren und Lernen*. Basel / Stuttgart.
- Wittmann, E. Ch. (1995). *Aktiv-entdeckendes und soziales Lernen im Mathematikunterricht*. Arbeitskreis Grundschule. Frankfurt.

Daniel Bienia und Andrea Einig
Pädagogische Hochschule Heidelberg

Aktivitäten mit dem SOMA Würfel – Lernen durch Handeln

Summary

The SOMA cube is a suitable medium which offers an approach to train spatial senses. Furthermore it provides many options for the analysis of different aspects in various subjects. This article discusses different ways of learning and use in maths classes as well as aspects of production in mechanics classes and documents them on the basis of concrete examples.

Einleitung

Klötzchen sind nicht nur zum Spielen da, sondern mit Klötzchen, in diesem Falle mit Würfeln, lassen sich unterschiedliche mathematische und technische Lernziele verwirklichen.

Im folgenden Artikel soll dargestellt werden, welche Einsatzmöglichkeiten der SOMA Würfel in der Schule bietet und welche Möglichkeiten sich für einen sinnvollen fächerübergreifenden Unterricht ergeben.

1 Polyominos im dreidimensionalen Raum

Grundbausteine für die räumlichen Polyominos sind die so genannten Einheitswürfel, von denen drei, vier oder fünf zu Trominos, Tetrominos bzw. Pentominos so aneinandergesetzt werden, dass immer zwei Würfel benachbart sind. Zwei Würfel heißen dann benachbart, wenn sie eine Seitenfläche als gemeinsame Punktmenge besitzen.

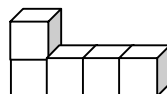
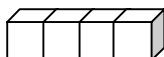


Abb. 1: Beispiel für ein Tromino, ein Tetromino und ein Pentomino

Räumliche Polyominos werden dabei als gleich bezeichnet, wenn sie durch eine Bewegung (Verschiebung oder Drehung) ineinander überführt werden können. Somit gibt es zwei unterschiedliche Trominos



Abb. 2: Alle Würfelanordnungen mit drei Würfeln

... und acht Tetrominos.

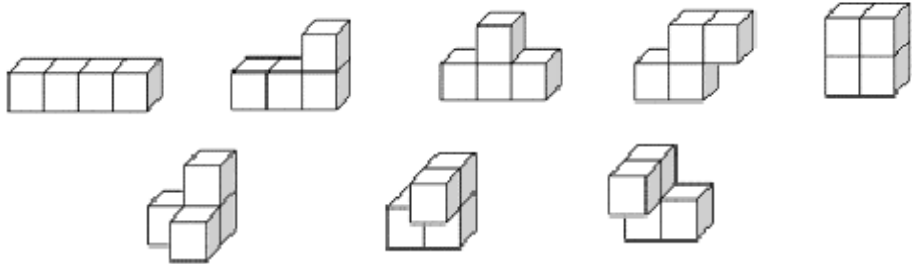


Abb. 3: Alle Würfelanordnungen mit vier Würfeln

2 Der SOMA Würfel –Entstehung

Der SOMA Würfel (der Name „SOMA“ entstammt dem Roman „Schöne neue Welt“ von Aldous Huxley, dort ist „SOMA“ eine Droge im fiktiven Staat 2600) ist eine der bekanntesten Packungsaufgaben mit räumlichen Trominos und Tetrominos und wurde von dem dänischen Spieleerfinder, Schriftsteller und Mathematiker Piet Hein (1905 – 1996) in einer Vorlesung von Heisenberg über Quantenphysik „erdacht“. Heisenberg, der bekannte Physiker, sprach gerade über die Zerlegung des Raums in Würfel. Dabei fiel Piet Hein folgender geometrischer Satz ein:

„Betrachtet man alle unregelmäßigen Körper, die aus nicht mehr als vier gleichgroßen und an den Seitenflächen verbundenen Würfeln bestehen, so lassen sich diese Würfelanordnungen zu einem großen Würfel zusammensetzen“ (vgl. Gardner 1968): dem SOMA Würfel.

Ein Körper heißt dabei unregelmäßig, nichtregulär oder auch nicht konvex, wenn er „mindestens einen Innenwinkel“ besitzt. Um den SOMA Würfel bauen zu können, benötigt man also nur die unregelmäßigen Trominos und Tetrominos, so dass folgende regulären Körper ausgeschlossen werden müssen:



Abb. 4: Alle regulären Körper mit nicht mehr als vier Einheitswürfeln

Eine andere Herangehensweise für das Finden der SOMA Teile führt über das Volumen des Würfels. Wenn man alle möglichen Drillinge (2×3 Einheitswürfel) und alle Vierlinge (8×4 Einheitswürfel) „addiert“, erhält man eine Menge von 38 Einheitswürfeln. Dies sind 11 Einheitswürfel mehr als die 27, die der $3 \times 3 \times 3$ SOMA Würfel enthält. Das bedeutet: ein Drilling und zwei Vierlinge gehören nicht zum SOMA Würfel. Die Vermutung liegt nun nahe, dass die Viererstange kein SOMA Teil ist und dass auch der regelmäßige Drilling und der regelmäßige Vierling ausgeschlossen werden müssen. Übrig bleiben dann ein Drilling und sechs Vierlinge, die zusammen den $3 \times 3 \times 3$ Würfel bilden. Dieser besteht aus 1 $\times 3$ Würfeln und 6 $\times 4$ Würfeln, also 27 Würfeln.

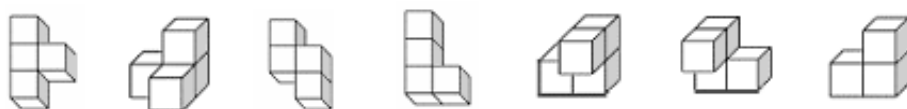


Abb. 5: Die sieben Teile des SOMA Würfels

Spannend ist nun die Frage wie viele Lösungsmöglichkeiten es für das Zusammensetzen der Teile zum SOMA Würfel gibt. Fragt man Grundschul-kinder, so bewegen sich die Schätzungen meist zwischen 10 und 30 unterschiedlichen Lösungen. Aus der Literatur ist aber ersichtlich, dass es genau 11 520 Lösungen des SOMA Würfels gibt, allerdings nur 240 nichtisomorphe Lösungen (vgl. Haider 2000, 38). Dabei gelten zwei Lösungen S1 und S2 genau dann als isomorph, wenn es ein Produkt von Transformationen (Drehungen und Spiegelungen) derart gibt, dass S1 zum Bild von S2 kongruent ist.

3 Der SOMA Würfel –Zielsetzungen

Ein wichtiges Ziel im Vor- und Grundschulalter ist die Schulung des räumlichen Vorstellungsvermögens. Denn gerade dieses Alter gilt als sensible Phase für die Entwicklung der Raumvorstellung. Der SOMA Würfel bietet hierzu vielfältige Möglichkeiten. „Bei den Spielen mit dem Somawürfel werden handlungsmäßige, bildhafte aber auch sprachlich-symbolische Darstellungen von Figuren und Körpern auf vielfältige Weise miteinander in Beziehung gesetzt. Insofern fördern die Spiele insbesondere den einen Aspekt des Vorstellungsvermögens, sich ebene und räumliche Figuren und ihre Abbildungen vorzustellen“ (Hiert/Meister 2002, 5). Aber auch für den Bereich der Arithmetik ist die Fähigkeit zum mentalen, visuellen Operieren von Bedeutung. „Nur ein Kind, das auf der Basis von selbst ausgeführten Handlungen adäquate visuelle Vorstellungsbilder entwickelt hat (...), kann den Sprung vom Veranschaulichungsmittel zum mathematischen Begriff vollziehen und

flexibel zwischen der enaktiven (handelnden), ikonischen (bildhaften) und symbolischen Ebene hin und her wechseln“ (vgl. Lorenz 1998).

Nach Hirt/Meister (2002) lassen sich mit dem SOMA Würfel vielfältige inhaltliche sowie allgemeine Zielsetzungen verfolgen:

3.1 Geometrische Erfahrungen als Beitrag zur Umwelterschließung

In zahlreichen Situationen des Alltags und in vielen Berufsfeldern benötigt man die Fähigkeit, Bilder räumlich zu interpretieren und räumliche Situationen in Bilder zu übersetzen. Schon Kinder stehen vor dieser Herausforderung, wenn es darum geht Pläne zu lesen, z.B. Stadtpläne, oder Einzelteile eines technischen Spielzeugs nach einer Bauanleitung zusammensetzen, z.B. bei „Fischer Technik“. Deshalb ist die Beschäftigung mit Grund- und Aufrissdarstellungen von Objekten außerordentlich wichtig. Die Arbeit mit den Karteikarten des SOMA Würfels (vgl. Rickmeyer 1996) bietet vielfältige Möglichkeiten, Figuren aus Plänen und Ansichten zu bauen. Andererseits können reale, von den Kindern erfundene Figuren in Zeichnungen übersetzt werden.

3.2 Förderung spezifischer Fähigkeiten im Bereich der Geometrie

Das geometrische Denken und die Fachsprache der Kinder werden gefördert, indem die Kinder z.B. die Form und Lage von Gegenständen im Raum beschreiben, Eigenschaften von geometrischen Gegenständen benennen oder auch Merkmale geometrischer Abbildungen erfassen.

3.3 Förderung allgemeiner Fähigkeiten im Bereich des Problemlösens

Neben den aufgeführten inhaltlichen können mit dem SOMA Würfel auch allgemeine Ziele erreicht werden, z.B. (vgl. Hirt/Meister 2002, 6):

- Möglichkeiten des Experimentierens,
- Formulierung von Vermutungen und Annahmen,
- Planen, Realisieren und Vergleichen von Lösungswegen,
- Entwicklung von Strategien,
- ...

Dabei werden auch Konzentrationsfähigkeit, Kooperationsbereitschaft und Ausdauer der Kinder gefördert.

4 Der SOMA Würfel –Didaktische Überlegungen

Ein wichtiges Lernziel der Unterrichtseinheit zum SOMA Würfel besteht darin, dass die Kinder den SOMA Würfel aus selbstgefertigten Trominos und Tetrominos zusammensetzen können.

Vor der Erarbeitung der einzelnen Teile des SOMA Würfels sollte den Kindern aber ausreichend Gelegenheit gegeben werden, mit Einheitswürfeln zu experimentieren. Dafür eignen sich besonders gut die farbigen Steckwürfel.

Im Anschluss daran muss besprochen werden, welche Würfelanordnungen im Folgenden betrachtet werden sollen. Dabei sind zwei Definitionen entscheidend:

- Die Würfel müssen sich an zwei Seitenflächen voll berühren.
- Würfelanordnungen heißen gleich, wenn sie durch Drehung oder Verschiebung ineinander überführt werden können.

Vereinfacht wird die Kommunikation über die Würfelanordnungen, indem eine kurze und prägnante Bezeichnung verwendet wird. Daher empfiehlt es sich, die Begriffe Zwillinge, Drillinge und Vierlinge zu verwenden, anstatt von Würfelanordnungen mit zwei, drei oder vier Würfeln zu sprechen.

In einer gemeinsamen Phase können die Kinder nun alle Möglichkeiten suchen, drei Würfel zusammenzustecken und so alle Drillinge zu finden. Hier kann exemplarisch auch die Gleichheit von Teilen besprochen werden, so dass die Kinder am Ende der Phase erkennen, dass es nur zwei Möglichkeiten gibt, drei Würfel wie verabredet miteinander zu kombinieren.

Ziel der nächsten Phase muss es sein, alle Möglichkeiten zu finden, vier Würfel zusammenzustecken. Dazu erhalten die Kinder eine ausreichende Zahl an Steckwürfeln (ca. 40 Stück). Anschließend werden die Ergebnisse gesammelt und besprochen. Um sich über die gefundenen Teile besser verständigen zu können, ist es wiederum hilfreich, gemeinsam mit den Kindern Namen für die Figuren zu erfinden (z.B. Hund, Stange oder Ecke). Dabei sind der Phantasie der Kinder keine Grenzen gesetzt. Später ermöglicht eine entsprechende Farbgebung eine schnelle Identifikation der verschiedenen Teile.

Nachdem alle möglichen Drillinge (zwei) und Vierlinge (acht) gefunden, beschrieben und gemeinsam besprochen wurden, muss es Ziel der nächsten Phase sein, bestimmte Würfelanordnungen auszuschließen, die keine SOMA Teile sind. Dies kann über das Volumen des SOMA Würfels erarbeitet werden (27 Einheitswürfel des 3x3x3 Würfels stehen 38 Einheitswürfeln der gefundenen Drillinge und Vierlinge gegenüber). Schnell wird es den Kindern einsichtig sein, dass die „Viererstange“ in einem Würfel mit einer Kantenlänge von drei Einheitswürfeln zu groß ist und daher ausgeschlossen werden muss. In Analogie dazu ist es möglich, dass sie nun auch die

„Dreierstange“ ausschließen und letztendlich auch das „Quadrat“ (!). Begründungen könnten sein, dass diese Figuren im Vergleich zu den anderen Figuren so „langweilig“ und „einfach“ erschienen. Eine kindgemäße Definition von regelmäßigen Figuren könnte sie als „glatt“ und ohne „Einbuchtungen“ beschreiben. Nachdem so alle sieben Teile des SOMA Würfels erarbeitet wurden, können die Kinder erstmals versuchen, aus diesen Teilen den Würfel zusammzusetzen. Dabei werden sie merken, dass das Steckwürfelmodell sich nur bedingt zum Bauen eignet, weil z.B. die Noppen stören, die Farbgebung uneinheitlich ist und die Steckwürfelteile beliebig auseinander genommen werden können – so dass ein stabileres Modell aus einem anderen Material wünschenswert erscheint.

5 Fächerübergreifender Ansatz

Der Themenbereich SOMA Würfel bietet gute Gelegenheiten für eine Zusammenarbeit der Fächer Mathematik und Technik. Der Würfel soll untersucht und in seinen Teilen erfasst werden, damit er von den Kindern selbst hergestellt und als Arbeitsmittel genutzt werden kann. Aber bevor diese Kooperation näher beschrieben wird, soll die Idee einer sinnvollen fächerübergreifenden Schul-Arbeit kurz umrissen werden.

Fächerübergreifender Unterricht ist eine von Seiten der Bildungsadministration gestellte Aufgabe. Die Fächer, die bisher für geordnete Formen der Welterschließung standen, werden teilweise aufgelöst und in Verbänden zusammengefasst. Aber auch Fächer, die eigenständig erhalten blieben – wie das Fach Mathematik – sind vom Paradigmenwechsel, der in der Schule stattfindet, betroffen und man kann auch hier nicht so tun, als ginge einen das Ganze nichts an. Es geht also darum, ein Konzept zu entwickeln, bei dem Zusammenarbeit stattfinden kann, ohne dass die Fächer ihre ordnende Funktion verlieren. Es geht um die Auflösung eines scheinbaren Widerspruchs: Sowohl der Sinn einer Kooperation, wie auch der Sinn des fachlich isolierten Vorgehens müssen zugleich erkennbar bleiben. Die Konzepte, die für einen fächerübergreifenden Unterricht vorgestellt werden, überzeugen hierbei nicht immer.

Daher nutzen die in den Bildungsplänen formulierten Ideen, so ansprechend sie zunächst auch sein mögen, wenig, wenn die Lehrer alleine gelassen und nicht mit Umsetzungshilfen und Handreichungen für die alltägliche Schularbeit versorgt werden. In Lehrerfortbildungsveranstaltungen werden häufig thematisch konzentrierte Zugänge vorgestellt, bei denen der Unterricht um einen Inhaltsbereich angeordnet wird. Am Themenbeispiel „Wiese“ wird dies deutlich: In Biologie werden Wiesenblumen bestimmt, im Fach Kunst wird eine Wiese gemalt, in der Musikstunde singt man ein passendes Lied und spricht im Fach Deutsch ein Gedicht. Im Mathematikunterricht wird bestimmt, wie groß der Umfang einer Wiese ist und wie lang ein Zaun sein müsste, der diese Wiese umfasst. Schließlich wird im Technikunterricht ein passendes Modell gebaut.

Eine solche Praxis schafft durchaus Zugänge zu fachlichen Fragestellungen und in allen Fächern werden relevante Bereiche angesprochen. Welchen Sinn macht aber eine derartige Gruppierung? Aus fachlicher Logik erscheinen die Beiträge zufällig, es ist zunächst auch nicht erkennbar, ob ihnen wirklich exemplarischer Wert zukommt. Ein solches thematisches Nebeneinander, ohne gemeinsame Unterrichtsabsichten, ohne aufeinander bezogene Ziele und ohne abgestimmte Kompetenzausprägungen führt eher zur Verwirrung als zu einer sinnvollen fächerverbindenden Struktur. Das Gemeinsame einer wirkungsvollen Zusammenarbeit ist nicht erkennbar. Die Fächer reihen sich um ein willkürlich, fast zufällig erscheinendes Themengebiet. Der Sinn derartigen Vorgehens bleibt verborgen.

Fächerverbindender Unterricht, der ausschließlich inhaltlich legitimiert wird, unterliegt oft einem Denkfehler: Nicht der Inhalt leitet Strukturen und orientiert Maßnahmen, sondern das Lernen. Nicht das Objektive rechtfertigt die Mühe der Schul-Arbeit, sondern die damit verbundenen Lehr- und Lernabsichten. Eine derartige Organisationsform, die den Unterricht um Themenähnlichkeiten herum gruppiert, gleicht dem Stochern im Nebel der Beliebigkeiten. Ein zentraler Aspekt des Bildungsdenkens, nämlich das Initiieren zielgerichteter Bildungsprozesse, bleibt unbedacht, weil Ziele nicht erkennbar sind.

Unterricht ist ein absichtsvolles Geschehen. Und wenn Fächer zusammenarbeiten, dann tun sie dies in gemeinsamer Absicht und auf gemeinsame Ziele hin. Was also stattfinden muss, ist eine Vereinbarung, welche denn die gemeinsamen Absichten der Zusammenarbeit sind. Es geht in der fächerübergreifenden Schul-Arbeit also nicht um die Vermittlung fertigen Wissens, sondern die Schüler sollen zum vielfältigen Fragen und zum Nachdenken ermuntert und ihre Fähigkeit zur Problemwahrnehmung und -lösung soll gefördert werden. Die Fächer helfen

- bei der Analyse unterschiedlicher Teilprobleme,
- bei der Wahrnehmung differenzierter Problemsichten,
- bei der Entwicklung der Fähigkeit zum vernetzten Denken usw.

6 Unterrichtsbeispiele

Die selbständige Anfertigung des SOMA Würfels ist eine Lernaufgabe, bei der die Absichten unterschiedlicher Fächer zum Tragen kommen sollen. Im Vordergrund des hier beschriebenen Themenbeispiels steht nicht das Produkt, sondern im fächerübergreifenden Unterricht sollen mit Hilfe dieses Mediums solche Handlungs- und Lernprozesse initiiert werden, die auf eine mathematische *und* auf eine technische Bildung zielen.

Eine mögliche Unterrichtseinheit zum Thema „SOMA Würfel“ kann beispielsweise folgendermaßen konzipiert werden:

1. Erarbeiten der SOMA Teile mit Steckwürfeln
2. Erstellen eines Bauplanes
3. Anfertigung der Bausteine mit Hilfe der Sägevorrichtungen
4. Bearbeitung der SOMA Teile
5. Stationsarbeit zum SOMA Würfel

Zu 1. Erarbeiten der SOMA Teile mit Steckwürfeln

Bei der Erarbeitung der Einzelteile des SOMA Würfels mit Steckwürfeln sollten die Eigentätigkeit und das Handeln der Kinder im Vordergrund stehen.



Abb. 6: Kinder erarbeiten die Teile des SOMA Würfels mit Steckwürfeln (vgl. Farbbild 3)

Zu 2. Erstellen eines Bauplanes

Zur Vorbereitung der Herstellung eines hölzernen SOMA Würfels bekommen die Schüler in Gruppen jeweils einen Würfel, den sie genauer betrachten sollen. Sie dürfen ihn zerlegen und vermessen, Hierbei machen sie mathematische Aussagen über Längen, Verhältnisse und Anordnungen. Sie erkennen unterschiedliche geometrische Formen, deren Längen aber immer Vielfache der Kantenlänge eines Einheitswürfels sind. (Ein solcher Einheitswürfel sollte ganzzahlige Kantenlängen haben.) Sie entdecken ferner, dass es mehrere Lösungen gibt, um einen Würfel zusammenzusetzen. Das bedeutet, dass die Teile austauschbar zusammenpassen müssen. Es macht also keinen Sinn, die Teile einzeln aneinander anzupassen: alle Teile müssen „universell“ verwendbar sein.

Die Schüler erhalten schließlich hölzerne Vierecksstäbe, deren Querschnitt der Grundfläche eines Einheitswürfels gleich ist. Diese Stäbe müssen so abgelängt werden, dass daraus die Formen für den Würfel hergestellt werden können. Hier gibt es unterschiedliche Möglichkeiten: Die mühsamste wäre es, alle Klötzchen als Einerwürfel abzusägen und diese anschließend zu Drillingen und Vierlingen zu verleimen. Einfacher ist es, längere Stäbe am Stück abzusägen. Aber auch hier gibt es verschiedene Möglichkeiten: z.B. kann ein Vierling in L-Form unterschiedlich zusammengesetzt werden:

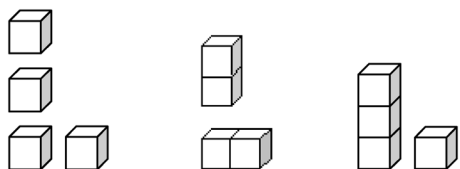


Abb. 7: Verschiedene Möglichkeiten zur Herstellung des Vierlings in L-Form

Die Kinder können selbst entscheiden, wie sie die Formen zusammensetzen. Nicht alle müssen sich für dieselbe Lösung entscheiden. Wichtig ist nur, dass jeder weiß, wie viele Teile in welchen Abmessungen er benötigt. Dies kann auf einer Materialliste deutlich erkennbar festgehalten werden. Zur Veranschaulichung sollte eine Tabelle mit Skizzen erstellt werden.

| | | | | | | | | |
|--|---|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | |
| | 1 | | | | | | | |
| | 2 | | | | | | | |
| | - | | | | | | | |

Abb. 8: Eine Tabelle als Planungshilfe

Zu 3. Anfertigung der Bausteine mit Hilfe der Sägevorrichtungen

Da alle Teile universell einsetzbar sein müssen, sind die Anforderungen an die Maßtreue recht hoch. Hier bieten sich gute Gelegenheiten für Sägeübungen und für die Entwicklung eigener Ideen, wie Probleme in geeigneter und vielleicht unüblicher Weise gelöst werden können – die Lösungen dürfen ebenso ungewöhnlich sein wie die genutzten Materialien und Hilfsmittel. Folgende Handlungs- und Experimentiermöglichkeiten bieten sich für eine Erkundung der Werkzeuge, zur Entwicklung und Nutzung von Vorrichtungen und zur Einübung der Handhabung an:

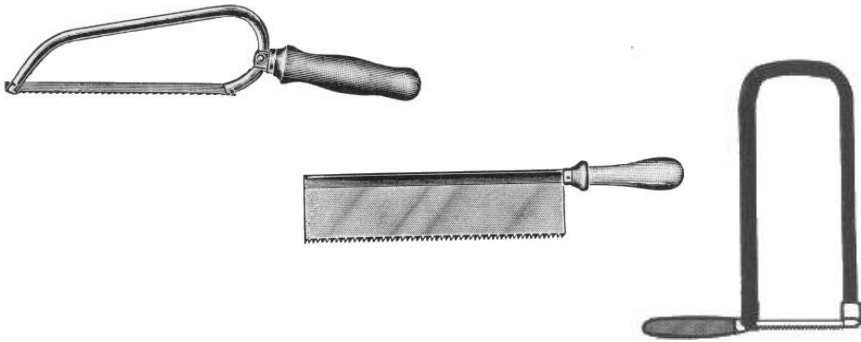


Abb. 9: PUK-Säge, Feinsäge und Laubsäge

- die Schüler testen unterschiedliche Sägen auf deren Eignung zum präzisen Ablängen der Vierkantstäbe,
- sie versuchen „frei Hand“ zu sägen,
- sie setzen unterschiedliche Hilfsvorrichtungen (z.B. Sägeladen) ein,
- sie „erfinden“ eigene Hilfskonstruktionen zum Sägen.

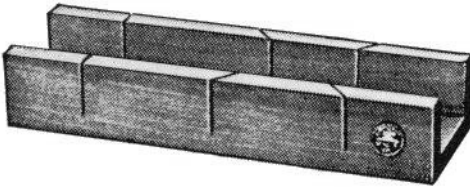


Abb. 10: Sägelade

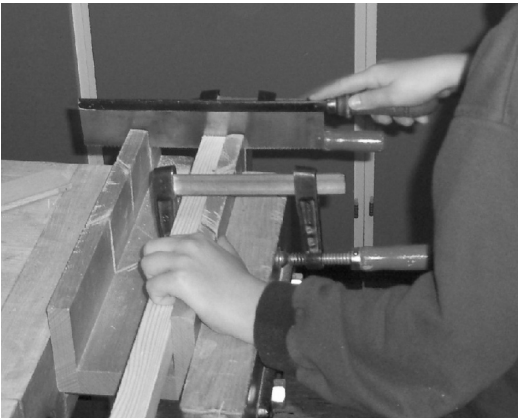


Abb. 11: Ein Kind sägt mit einem Hilfsanschlag für die Säge (vgl. Farbbild 4)

Die Erfahrungen mit den Vorrichtungen sind im Bereich der Grundschule sehr gut. Die Kinder konnten gebrauchstaugliche SOMA Würfel fertigen.

Zu 4. Bearbeitung der SOMA Teile

In einem nächsten Schritt müssen nun die gesägten Einzelteile zu den entsprechenden Teilen des SOMA Würfels zusammengesetzt und verleimt werden. Hier ist besonders präzises Arbeiten der Kinder nötig und zwar in zweifacher Hinsicht:

- Die Kinder müssen ihre Teile wie in der Tabelle notiert zusammensetzen.
- Beim Verleimen der Teile müssen die Kanten exakt abschließen, so dass die Teile auch später gut ineinander passen.

Abschließend werden die Vierlinge und der Drilling mit Wohnraumlack in entsprechenden Farben angemalt, dies dient der leichteren Bezeichnung der Teile und der Arbeit mit den Karteikarten.



Abb. 12 und 13: Die Kinder bemalen die SOMA Teile in unterschiedlichen Farben (vgl. Farbbilder 5 und 6)

Zu 5. Stationsarbeit zum SOMA Würfel

In drei Beispielen soll aufgezeigt und dokumentiert werden, wie nach der Erarbeitung und Herstellung des SOMA Würfels mit diesem Arbeitsmittel in einer vierten Klasse gearbeitet wurde.

Beispiel 1: Nachbauen von Figuren

Eine Aufgabe bestand darin, mit den SOMA Teilen verschiedene Figuren nachzubauen. Dazu standen den Kindern Karteikarten (vgl. Rickmeyer 1996) zur Verfügung, bei denen auf der Vorderseite eine Figur zu sehen ist. Daneben steht beispielsweise der Arbeitsauftrag:

Baue den „Turm“ mit vier Steinen des Somawürfels nach.
Gibt es mehrere Lösungen?

Auf der Rückseite befindet sich ein Lösungshinweis in der Form, dass die Farben der entsprechenden Teile genannt werden, die verwendet werden können. Interessant war das Vorgehen eines Jungen bei der Aufgabe zum

„Turm“. Er schaute sich die Abbildung an, überlegte kurz und folgte dann: „Ich brauche vier Vierlinge, denn der Turm besteht aus vier Stockwerken mit immer vier Würfeln“.

Es konnte beobachtet werden, dass die Kinder durch den Hinweis auf mehrere Lösungsmöglichkeiten hoch motiviert waren, andere Lösungen als die vorgegebenen zu finden.

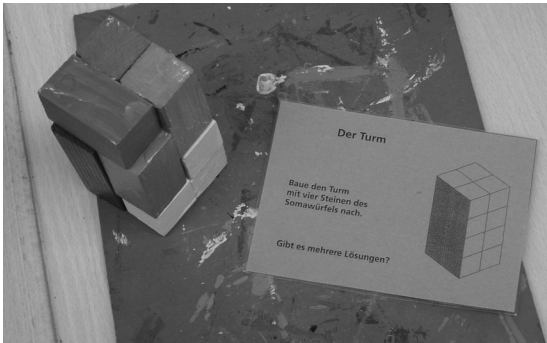


Abb. 14: Die Kinder arbeiten mit den Karteikarten von Rickmeyer (vgl. Farbbild 7)

Beispiel 2: Erfinden von eigenen Figuren

Eine interessante Möglichkeit zum Umgang mit dem SOMA Würfel ist es, die Kinder selbst Figuren erfinden zu lassen. Diese können zunächst konkret gebaut werden, bevor sie dokumentiert und festgehalten werden. Dies kann in Form von Fotos oder auch Freihandzeichnungen geschehen.

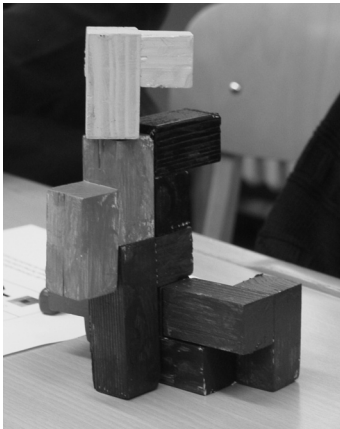


Abb. 15: Die Kinder erfinden eigene Figuren (vgl. Farbbild 8)

Beispiel 3: Zeichnen von Lösungen

Diese Übung besteht darin, dass die Kinder zunächst den Würfel zusammenbauen. Anschließend soll die gefundene Lösung folgendermaßen dokumentiert werden: die sechs Seitenansichten des Würfels werden auf ein 3×3

Kästchenpapier übertragen und entsprechend eingefärbt. So erhält man unterschiedliche Lösungsmöglichkeiten zum Bau eines Würfels, die in einer weiteren Übung auch als Bauanleitung genutzt werden können.

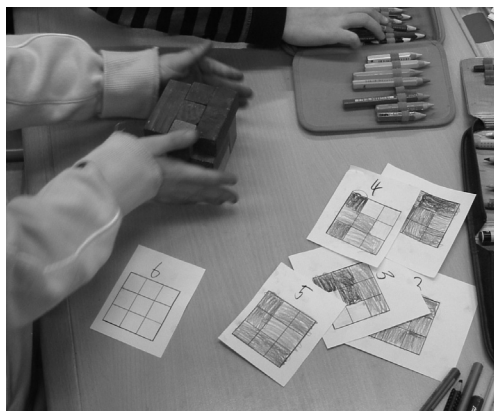


Abb. 16: Die Kinder zeichnen Ansichten ihres Würfels (vgl. Farbbild 9)

7 Fazit

Insgesamt kann ein sehr positives Fazit der Unterrichtseinheit zum SOMA Würfel gezogen werden. Die Kinder waren mit Feuereifer bei der Sache und es konnten vielfältige mathematische Lernziele, wie z.B. Herausfinden der unterschiedlichen Würfelanordnungen oder die Schulung der Raumvorstellung, und technische Lernziele, wie z.B. die Handhabung einfacher Werkzeuge oder die Nutzung und Entwicklung von Vorrichtungen, erreicht werden.

Dies belegen auch zwei Aussagen der Kinder einer vierten Klasse, als sie gefragt wurden, was sie an der Einheit zum SOMA Würfel besonders gut fanden. Ein Junge sagte: „Mir hat gut gefallen, dass wir nicht schreiben und rechnen mussten wie sonst, sondern anders denken – wie ein Rätsel“. Und ein Mädchen meinte stolz: „Jeder konnte seinen Würfel selbst sägen und auch mit nach Hause nehmen!“

Literatur

- Defila, R./ Di Giulio, A. (2002). "Interdisziplinarität" in der wissenschaftlichen Diskussion und Konsequenzen für die Lehrerbildung. In: Wellensiek A. / Petermann H.-B. (Hrsg.). *Interdisziplinäres Lehren und Lernen in der Lehrerbildung. Perspektiven für innovative Ausbildungskonzepte*. Weinheim/Basel, 17–29.
- Gardner, M. (1968³). *Mathematische Rätsel und Probleme*. Braunschweig.
- Haider, T. (2000). *Polyominoes. Von Packungen in der Ebene zum SOMA Würfel*. Unveröffentlichte Diplomarbeit. Institut für Geometrie an der TU Wien.
- Hirt, U. / Meister, S. (2002). *Die Spiele mit dem Somawürfel – Förderung der Eigentätigkeit und des Mathematiklernens*. Skript zum 12. Symposium „mathe 2000“ in Dortmund.

- Kösch, H. / Spiegel, H. *Den Soma Würfel interaktiv erfahren*. Pdf-Datei unter <http://math-www.upb.de/~hartmut/>
- Kroll, W. (1994). Soma – Kisten. Raumgeometrie in der Grundschule. *Praxis Grundschule* 1994, Heft 5, 36–38.
- Lorenz, J. H. (1998). *Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht. Mentales visuelles Operieren und Rechenleistung*. Göttingen.
- Moegling, K. (1998). *Fächerübergreifender Unterricht – Wege ganzheitlichen Lernens in der Schule*. Bad Heilbrunn/Obb.
- Rekus, J. (1994). Lernen in Bezügen. *5-10 Schulmagazin* 9/94, 8–11.
- Rickmeyer, K. (1996). Übungen mit dem Somawürfel. Zur Entwicklung der Raumvorstellung. *Praxis Grundschule*. 1996, Heft 2, 4–9.
- Schlautmann, M. (1995). Das Geheimnis der Häuser von Soma. *Praxis Grundschule* 1995, Heft 6, 38–41.
- Schmayl, W. (1999). Zur Methodik des Technikunterrichts: begriffliche, historische und systematische Betrachtungen. *TU: Zeitschrift für Technik im Unterricht*, Jg. 24, H. 3, 5–15.
- Wilkening, F. (1980). *Unterrichtsverfahren im Lernbereich Arbeit und Technik*. Ravensburg.
- Winkler, D. (2006). *Karteien zum Soma-Würfel. Bauen und Experimentieren mit dem Soma-Würfel*. Braunschweig.

Sabine Kaufmann
Pädagogische Hochschule Heidelberg

Fermi-Aufgaben in der Grundschule

Summary

Fermi Problems (named after the physicist Enrico Fermi) are complex questions which can be solved – due to insufficient numerical information – by estimation only. These kinds of problems pose high but definitely manageable challenges for primary students. General mathematical competencies are much-needed as well as facilitating.

Was sind Fermi-Aufgaben?

Enrico Fermi (1901–1954) war ein bedeutender Physiker des 20. Jahrhunderts, der 1938 mit dem Nobelpreis ausgezeichnet wurde. Er war dafür bekannt, spontan gute Abschätzungen liefern zu können, wenn eine rechnerische Lösung aufgrund unzureichender numerischer Informationen nicht möglich war. Da er diese Fähigkeit auch seinen Studenten vermitteln wollte, stellte er ihnen häufig Fragen, die auf den ersten Blick eigenartig und nicht beantwortbar schienen. Zu den klassischen Fermi-Aufgaben gehört die Frage nach der Anzahl der Klavierstimmer in New York City. Hieran zeigt sich deutlich, dass es bei dieser Art von Aufgaben lediglich ungefähre Ergebnisse geben kann, da die fehlenden Angaben geschätzt, d.h. über „Hilfsfragen“ (Wie viele Menschen leben in NYC? Wie viele haben ein Klavier? Wie oft wird ein Klavier gestimmt? Wie hoch ist die Jahresarbeitszeit eines Klavierstimmers? Wie lange braucht die Stimmung eines Klaviers?) plausibel begründet werden müssen.

Schwierigkeiten und Chancen

Fermi-Aufgaben gehören aufgrund ihres Wirklichkeitsbezuges zur Kategorie des Sachrechnens, was gemeinhin als schwieriger Anforderungsbereich gilt. Selbst bei „traditionellen Schulbuchaufgaben“ muss zunächst die Sachsituation in ein mathematisches Modell übertragen werden, bevor die mathematische Lösung erarbeitet werden kann. Die auf der mathematischen Ebene gefundene Lösung muss danach wieder auf die Sachebene rückgeführt werden, d. h. die Ergebniszahl muss im Zusammenhang mit der Situation interpretiert und auf Plausibilität überprüft werden. Häufig ist zu beobachten, dass bei der Lösung von Sachaufgaben die vorgegebenen Zahlen mit der

Operation verknüpft werden, die eventuell im Unterricht gerade verstärkt „behandelt“ wird, weil der Text entweder gar nicht richtig gelesen oder die beschriebene Sachsituation nicht verstanden wird. Ein Vorteil von Fermi-Aufgaben liegt darin, dass bei „Sachaufgaben ohne Zahlen“ die Kinder nicht zu vorschnellen operationalen Verknüpfungen verleitet werden.

Allerdings ist gegenüber traditionellen Sachaufgaben aus dem Schulbuch, die in der Regel bereits modellhaft formuliert sind, der Modellbildungsprozess dadurch wesentlich erschwert, dass bei Fermi-Aufgaben zunächst auf der Sachebene ein Situationsmodell erstellt werden muss: die komplexe Situation muss also zunächst vereinfacht, strukturiert und auf das notwendige Maß idealisiert werden, damit sie erfassbar wird.

Seel (2003) geht davon aus, dass Situationsmodell und mathematisches Modell in Beziehung gesetzt werden müssen, und nur dann, wenn es gelingt, eine Passung zwischen Situationsmodell und mathematischem Modell zu erzielen, wenn Situationsmodell und mathematisches Modell kompatibel sind, ein mathematisches Lösungsmodell gebildet werden kann. Hierfür ist es notwendig, dass Analogien gebildet werden können. Da der Umfang und die Qualität des abrufbaren deklarativen und prozeduralen Wissens Qualität und Reichweite des analogen Transfers bestimmen, bedeutet dies, dass die Modellbildung wissensabhängig ist und somit jüngere Kinder auch infolge fehlenden Weltwissens nicht uneingeschränkt zum Modellbilden in der Lage sind.

Trotz der genannten Schwierigkeiten und Einschränkungen konnte in einer kleinen Untersuchung jedoch gezeigt werden, dass GrundschülerInnen durchaus fähig sind, Fermi-Fragen zu beantworten. Kinder aus 24 vierten Klassen sollten innerhalb eines Schuljahres mehrere Fermi-Aufgaben lösen (1. Wie viele Bohnen sind in der 1-Kilogramm-Packung? 2. Wie viele Stühle gibt es wohl in unserer Stadt? 3. Wenn dein Ranzen mit 2-€ Stücken gefüllt wäre, wie viel Geld wäre das? 4. Passen 1 Million Euro in einen Schuhkarton? 5. Wie groß ist die Statue ungefähr, der dieser Schuh passt? 6. Wenn alle Autos in Deutschland in einer Schlange stehen würden, würde diese Schlange um die Welt reichen? 7. Passen alle Menschen der Welt auf die Fläche des Bodensees? 8. Jeden Tag produziert unsere Kopfhaut meterweise neues Haar! Stimmt das?).

Interessanterweise zeigte sich ein signifikanter Zusammenhang zwischen der Schülereinstellung zu Fermi-Aufgaben und dem Lösungserfolg auf Klassenebene, wobei LehrerInnen- und SchülerInnenurteil korrelierten. In den Klassen der positiv eingestellten LehrerInnen und SchülerInnen lösten 32 der 50 Gruppen (64 %) ihre allererste Fermi-Aufgabe erfolgreich, während es bei den negativ eingestellten LehrerInnen und SchülerInnen lediglich 11 von 51 Gruppen (22 %) waren (Abb. 1).

Auch konnte zwischen aufgewendeter Zeit und Lösungserfolg ein Zusammenhang festgestellt werden. Allerdings zeigte sich, dass lediglich bei

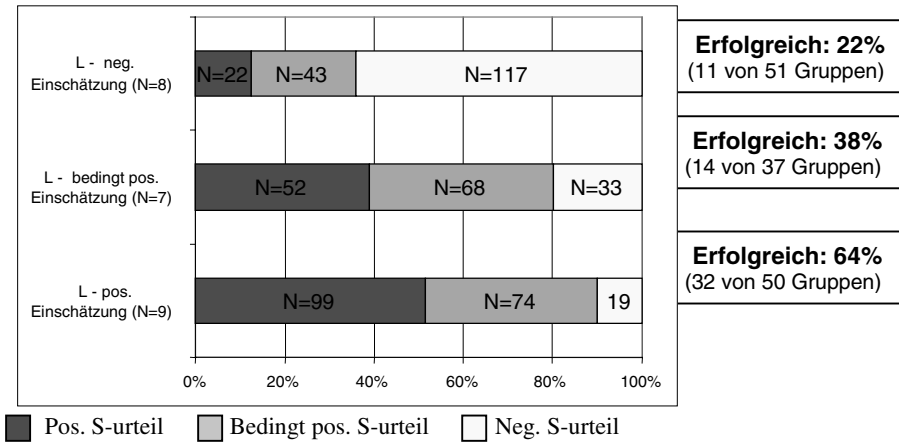


Abb. 1: Zusammenhang Lehrer-/Schülerurteil –Lösungserfolg

den ersten beiden Aufgaben die für die Lösung in den Gruppen aufgewendete Zeit direkt den Lösungserfolg beeinflusste. Bei den folgenden Aufgaben zeigte sich hingegen ein Zusammenhang mit der für Präsentation, Reflektion und Diskussion vorangegangener Aufgaben verwendeten Zeit.

Des Weiteren ließ sich zeigen, dass es auch bei Fermi-Aufgaben einen Übungseffekt gibt: trotz ansteigender Komplexität der Aufgaben und geringerer Lösungszeit stieg die Lösungshäufigkeit an. Der Übungseffekt liegt wohl neben der Überwindung der anfänglichen Verunsicherung über die ungewohnten Aufgabenstellungen vor allem in der Herangehensweise bei dererlei Aufgaben: so konnte festgestellt werden, dass in vielen Gruppen zunächst mögliche Hilfsfragen formuliert wurden und dass Analogien zu vorhergegangenen Aufgabenlösungen gesucht und genutzt wurden. Auch ließ sich beobachten, dass die Kreativität bei den Vorgehensweisen stieg und zunehmend auch mehrere Lösungsansätze in einer Gruppe diskutiert wurden, während bei den ersten Aufgaben meist der in der Gruppe erstgenannte Vorschlag angenommen und weiterverfolgt wurde.

Kompetenzentwicklung an Fermi-Aufgaben

Mathematische Grundbildung („Mathematical Literacy“) wird im Rahmen von OECD/PISA als Fähigkeit einer Person definiert, „die Rolle zu erkennen und zu verstehen, die Mathematik in der Welt spielt, fundierte mathematische Urteile abzugeben und sich auf eine Weise mit der Mathematik zu befassen, die den Anforderungen des gegenwärtigen und künftigen Lebens dieser Person als konstruktivem, engagiertem und reflektierendem Bürger entspricht“ (Baumert et al., 2000). Neben den mathematischen Kenntnissen und Fähigkeiten, wie sie im traditionellen Curriculum der Schulmathematik definiert werden, wird also auch die funktionale Anwendung von mathematischen Kenntnissen in unterschiedlichen Kontexten und auf unterschiedli-

che, Reflexion und Einsicht erfordernde Weise als wichtige Kompetenz eingestuft. Die von der Kultusministerkonferenz benannten allgemeinen mathematischen Kompetenzen – Problemlösen, Kommunizieren, Argumentieren, Modellieren, Darstellen – werden bei der Bearbeitung von Fermi-Aufgaben allesamt gefördert und gefordert. Die inhaltlichen Kompetenzen sind abhängig von der jeweiligen Fragestellung, den Lehrervorgaben und den gewählten Vorgehensweisen der SchülerInnen.

In dem Text steht, dass auf einem Quadratcentimeter 150 Haare wachsen
Wieviel Quadratcentimeter hat der Kopf?

Tilo hat Cassandra eine Mütze aus Papier gemacht. Wir haben die Mütze
zerschneiden und so gelegt das es ein Viereck ist 28 cm lang und 19 cm breit

$$\begin{array}{r} 28 \cdot 19 \\ \underline{280} \\ + 252 \\ \hline 532 \end{array}$$

Dann haben wir noch gezählt 4 Kästchen sind ein Zentimeterquadrat die
Kästchen sind gezählt 2000

$$\begin{array}{r} 2000 : 4 = 500 \\ \underline{2000} \\ 00 \\ \hline 00 \\ \hline 0 \end{array}$$

500 sind die Zentimeterquadrate

$$\begin{array}{r} 500 \cdot 750 \\ \underline{50000} \\ 25000 \\ \hline 75000 \end{array}$$

75000 das sind die Haare auf dem Kopf in drei Tagen 1mm steht im Text

$$75000 \text{ mm} = 7500 \text{ cm} = 75 \text{ m}$$

In einem Tag 25 Meter

Es stimmt! ▽

Abb. 2: Schülerlösung (vgl. Farbbild 10)

So waren beispielsweise bei der Aufgabe „Jeden Tag produziert unsere Kopfhaut meterweise neues Haar! Stimmt das?“ folgende Aktivitäten zu beobachten (Abb. 2):

- verschiedene Vorgehensweise wurden diskutiert, ein „Arbeitsplan“ erstellt, Hilfsfragen formuliert,
- notwendige Informationen wurden beschafft: Fachtexte gesucht, gelesen (Haaranzahl pro Quadratcentimeter; Wachstum der Haare),
- der Mittelwert wurde bestimmt (Anzahl der Haare pro Quadratcentimeter zwischen 100 und 200: durchschnittlich 150),
- die Fläche der Kopfbehaarung wurde experimentell ermittelt,

- durch Zerlegen und Zusammenfügen der entstandenen „krummen“ Fläche wurde eine berechenbare Fläche hergestellt,
- der Inhalt der rechteckigen Fläche wurde berechnet, überprüft, gerundet (Flächenberechnung mit Formel; Zählen der Rechenkästchen; Division durch 4),
- die Anzahl der Kopfhaare wurde berechnet (Multiplikation),
- das Gesamtwachstum der Haare an 3 Tagen wurde berechnet (Größenumrechnung; zwei sich ausgleichende Fehler),
- das Gesamtwachstum der Haare an 1 Tag wurde berechnet (Division),
- Lösungsvorgehen und Ergebnis wurden dokumentiert,
- in der Präsentations- und Besprechungsphase wurden fremdes und eigenes Lösungsvorgehen und Ergebnis verglichen, nachvollzogen, reflektiert, hinterfragt, auf Korrektheit überprüft.

Im Zusammenhang mit Unterrichtsqualität und Kompetenzentwicklung wird häufig die Qualität der Aufgaben diskutiert. Als wichtige Qualitätsaspekte benennt Leuders (2001) die Offenheit echter Probleme, das Durchbrechen der Exaktheit, die Anwendbarkeit im Alltag und die Lösungskompetenz für reale Probleme. Diese Aspekte werden bei Fermi-Aufgaben allesamt berücksichtigt. So ist es nicht offensichtlich, welche Methode zur Lösung führt, auch sind nicht alle notwendigen Angaben verfügbar. Dies macht Tätigkeiten wie Schätzen und Überschlagen erforderlich, Fähigkeiten, die ebenso wie das Kontrollieren und Bewerten von Lösungen zwar hohe Alltagsrelevanz haben, im Unterricht jedoch häufig nicht ausreichende Beachtung finden. Die Problemsituationen müssen erst mathematisiert werden, zur Lösung müssen mathematische Kenntnisse aus verschiedenen mathematischen und außermathematischen Bereichen integriert werden, wobei teilweise eine Erweiterung des Wissensbestandes erforderlich ist. Alltagswissen und Mathematikunterricht werden dabei vernetzt. Bei manchen Fermi-Fragen kann sicherlich in Frage gestellt werden, ob deren Beantwortung tatsächlich für den Alltag relevant ist, doch bezieht sich die Relevanz dann zumindest auf die Alltagsanwendbarkeit der bei der Aufgabe vermittelten Methoden und Lösungsstrategien.

Wenngleich der Charakter von Aufgaben die Unterrichtsqualität in starkem Maße beeinflusst, bestimmt die Aufgabenstruktur jedoch nicht die Unterrichtsprozesse. „Das Potenzial einer Aufgabe entfaltet sich erst im methodischen Umgang mit ihr“ (Leuders 2001, 96). Die kompetenzförderliche Bearbeitung von Fermi-Aufgaben stellt sowohl an LehrerInnen als auch an SchülerInnen Anforderungen, die nicht mit der noch vielerorts praktizierten direktiven, behelrenden Verfahrensweise vereinbar sind. Nicht das „Belehren“, sondern vielmehr die Organisation der Lernprozesse, die Moderation, die Beratung müssen die LehrerInnenrolle bestimmen. Die SchülerInnen hingegen müssen selbst aktiv und produktiv werden, Verantwortung für ihr selbständiges Arbeiten übernehmen, dieses planen und gestalten. Dies erfordert ein hohes Maß an Methoden- und Sozialkompetenz, an Lern- und Ar-

beitstechniken, Kommunikations- und Kooperationstechniken. Vor allem dann, wenn Lehrkraft und Kinder nicht an offene Lern- und Arbeitsformen gewöhnt sind, sollte mit einfachen überschaubaren Aufgaben begonnen werden, damit die nötige Grundsicherheit und methodische Routinen nach und nach erworben werden können. Auf diesem Hintergrund kann dann die erforderliche Experimentierfreude entstehen, die Unterrichtskultur positiv verändern kann.

Doch was verhindert dennoch den häufigeren Einsatz solcher Aufgaben in der Grundschule? Die am häufigsten genannten Gegenargumente beziehen sich auf den hohen Zeitbedarf und den für GrundschülerInnen angenommenen zu hohen Schwierigkeitsgrad. Auch die „Unwichtigkeit“ der Lösungen von Fermi-Fragen wird häufig genannt. Bei einer Fragebogenumfrage im Rahmen einer Lehrerfortbildung zum Thema Sachaufgaben, erklärten zu Beginn der Veranstaltung 18 von 29 LehrerInnen, dass sie keinesfalls Fermi-Aufgaben bearbeiten werden, 7 Lehrkräfte beantworteten die Frage nach dem künftigen Einsatz mit „vielleicht“ und nur 4 wollten diesen Aufgabentyp „ganz sicher“ erproben. Nach der Veranstaltung – dem eigenen Lösen von Fermi-Aufgaben und der Analyse von Schülerlösungen – lehnten zwar immer noch 11 LehrerInnen den Einsatz von Fermi-Aufgaben im Grundschulunterricht ab, doch wollten immerhin 8 Lehrkräfte diesen Aufgabentyp „vielleicht“ und 10 Lehrkräfte „ganz sicher“ erproben. Die Erfahrung der eigenen Begeisterung beim Lösen, die Reflexion der eigenen Erfahrungen und die Analyse der Lernchancen in der Lehreraus- und -fortbildung können also vielleicht dazu beitragen, dass Fermi-Aufgaben und auch andere herausfordernde, kompetenzfördernde, offene Aufgaben, die zum „Mathematik-treiben“ ermuntern, mehr Einsatz im Unterricht finden.

Literatur

- Baumert, J. et al. (2000). *Internationales und nationales Rahmenkonzept für die Erfassung von mathematischer Grundbildung in PISA*. Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung.
- Kaufmann, S. (2006). Umgang mit unvollständigen Aufgaben – Fermi-Aufgaben in der Grundschule? *Grundschulzeitschrift* 191, 1/2006.
- Kittel, A. / Marxer, M. (2005). Wie viele Menschen passen auf ein Fußballfeld? *Mathematik lehren* 131, 14 ff.
- Leuders, T. (2001). *Qualität im Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.
- Miehe, K. / Miehe, S. (2004). *Praxishandbuch Cooperative Learning*. Meezen: Dragonboardpublishers.
- Peter-Koop, A. (2003). Wie viele Autos stehen in einem 3-km-Stau? – Modellbildungsprozesse beim Bearbeiten von Fermi-Problemen in Kleingruppen (112–130). In: Ruwisch, S. / Peter-Koop, A. (Hrsg.) (2003). *Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule*. Offenburg: Mildenerger.
- Seel, N. M. (2003). *Psychologie des Lernens*. München: Ernst Reinhardt.

Christiane Benz
Pädagogische Hochschule Karlsruhe

Das Pascalsche Dreieck – Ein Aufgabenformat für Grund- und Hochschule

Summary

Pascal's Triangle - Possibility to do maths in primary and further education. Through the different kinds of exercises concerning Pascal's triangle the possibilities to do maths in primary as well as further education can be demonstrated.

Einleitung

Welche Rolle die Mathematik in der Mathematiklehrerausbildung spielen soll, wird immer wieder diskutiert (Selter 1995, Terhart 2000, Wittmann 2003). Doch *was* ist eigentlich Mathematik?

Auf diese Frage gibt es viele Antworten, die verschiedene Aspekte der Mathematik als Wissenschaft beleuchten. Mathematik kann zum einen als System von Begriffen und eindeutigen Regeln verstanden werden, so wie man es in der Definition des Online Meyers Lexikon nachlesen kann. „Die Mathematik ist gekennzeichnet durch eine hohe Präzision ihres Begriffssystems, Strenge ihrer Beweismethoden und einen stark deduktiven Charakter ihrer Darlegung“.

Dabei kann man Mathematik durchaus anhand verschiedener Aspekte beschreiben, wie z.B. unter dem Formalismusaspekt, dem schematischen Aspekt, dem Anwendungsaspekt oder dem Prozessaspekt (vgl. Grigutsch/Raatz/Törner 1998).

1 Mathematik als Tätigkeit und Wissenschaft von den Mustern

Ich möchte in diesem Artikel auf zwei andere wissenschaftstheoretische Sichtweisen auf die Mathematik eingehen.

Freudenthal definiert Mathematik als *Tätigkeit* im Gegensatz zu Mathematik als Fertigprodukt. „Mathematik ist keine Menge von Wissen. Mathematik ist eine Tätigkeit, eine Verhaltensweise, eine Geistesverfassung“ (Freudenthal 1982, 140). Er stellt dar, dass Mathematik nicht mit Definitionen, deduktiven Systemen oder Axiomen beginnen kann, sondern von Beispielen ausgehen muss, die Entdeckungen zulassen (vgl. Steinweg 2001, 25,

Freudenthal 1973, 589). Er weist darauf hin, dass Mathematik im Prozess entstanden ist. Deswegen sollen Lernende selbst durch eigenes Erforschen an diesem Prozess teilhaben. Sie sollen die Mathematik so lernen dürfen, wie ein Forscher sie „erschaffen hat“. Ihnen soll eine Sichtweise von Mathematik vermittelt werden, die sich unterscheidet von einer Ansammlung von Regelwissen und Rezepten. Mathematik ist nicht etwas Fertiges bzw. ein Fertigprodukt. „Mathematik steht für eine Tätigkeit, bei der

- Intuition, Phantasie und schöpferisches Denken beteiligt sind
- man durch eigenes und gemeinschaftliches Nachdenken Einsichten erwerben und Verständnis gewinnen kann und
- selbstständig Entdeckungen machen und dabei Vertrauen in die eigene Denkfähigkeit und Freude am Denken aufbauen kann“ (vgl. Spiegel/Selter 2003, 47).

Auch Devlin betont die Tätigkeit: „But for all that mathematics books tend to be awash with symbols, mathematical notation no more is mathematics than musical notation is music. (...) It is in its performance that the music comes alive and becomes part of our experience; the music exists not on the printed page but in our minds. The same is true for mathematics“ (Devlin 1997, 3-4).

Er bezeichnet die Mathematik als die Wissenschaft von den Mustern. Wenn Studierende, Schülerinnen und Schüler Mathematik in diesem Sinn erfahren sollen, kann dies nicht durch passive Rezeption vorgegebener Muster geschehen, sondern ist an eine eigenaktive Auseinandersetzung mit ihnen geknüpft. Dabei ist zu bedenken, dass nicht jedes Muster, das durch Zahlen oder geometrische Objekte gebildet wird, immer augenscheinlich im intendierten Sinn ist. Die Aufmerksamkeit muss auf die wesentlichen Elemente gerichtet werden, um die Muster oder Strukturen zu erkennen (vgl. Steinweg 2001, 116).

Das Entdecken von Strukturen und Mustern und der Austausch darüber bietet neben den inhaltlichen Lernzielen die Möglichkeit der Förderung prozessbezogener Kompetenzen wie Darstellen, Kommunizieren und Argumentieren, die in den heutigen Bildungsstandards der KMK als allgemeine mathematische Kompetenzen gefordert werden. Diese gehen zurück auf die allgemeinen Lernziele von Winter. Wie Winter schon vor rund 30 Jahren dargelegt hat, korrespondieren diese prozessbezogenen Kompetenzen mit grundlegenden Wesenszügen des Menschen (anthropologischer Bezug) und Zielsetzungen der allgemeinbildenden Schule.

Wie Lernende sowohl in Schule als auch Hochschule Mathematik als Tätigkeit und als Wissenschaft von den Mustern erfahren und entdecken können, soll anhand des Pascalschen Dreiecks aufgezeigt werden. Dabei wird zuerst auf den historischen Hintergrund eingegangen, und einige Muster und Strukturen werden mathematisch näher beleuchtet und erklärt. Anschließend wird anhand von Studierendenlösungen und Kinderarbeiten vorgestellt, welche Möglichkeiten und Chancen sich bei der Beschäftigung mit

dem Pascalschen Dreieck ergeben, Mathematik als Tätigkeit und als Wissenschaft von den Mustern zu erfahren.

2 Muster und Strukturen im Pascalschen Dreieck

Bevor Sie nun weiter lesen, sollten Sie in aller Ruhe diese „Musterlandschaft“ (Benz/Steinweg 2007) erkunden, eigene Wege betreten, Muster erkennen und erforschen. Sie sollten sich überlegen, welche Muster und Strukturen Sie erkennen können. Oder allgemeiner gesagt, Sie sollen zuerst Mathematik als Tätigkeit und Wissenschaft von den Mustern selbst erleben.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|--|--|--|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|----|-----|----|-----|---|----|---|----|--|---|
| | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | 1 | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | 1 | | 2 | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | 1 | | 3 | | 3 | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | 1 | | 4 | | 6 | | 4 | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | 1 | | 5 | | 10 | | 10 | | 5 | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | 1 | | 6 | | 15 | | 20 | | 15 | | 6 | | 1 | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | 1 | | 7 | | 21 | | 35 | | 35 | | 21 | | 7 | | 1 | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | 1 | | 8 | | 28 | | 56 | | 70 | | 56 | | 28 | | 8 | | 1 | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | 1 | | 9 | | 36 | | 84 | | 126 | | 126 | | 84 | | 36 | | 9 | | 1 | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | 1 | | 10 | | 45 | | 120 | | 210 | | 252 | | 210 | | 120 | | 45 | | 10 | | 1 |

Abb. 1: Pascalsches Dreieck

Wahrscheinlich werden Sie die meisten Ihrer Muster in der Weiterführung des Artikels wieder finden, vielleicht jedoch auch nicht.

2.1 Historischer Hintergrund

Der Name des Pascalschen Dreiecks verweist auf Blaise Pascal (1623–1662), obwohl er nicht der erste war, der diese Zahlenanordnung entdeckte. „Es prangt auf der Titelseite eines Arithmetikbuches von Petrus Apianus aus dem frühen 16. Jahrhundert, findet sich in einem chinesischen Mathematikbuch von 1303 und ist nachweisbar bis zurück zu dem persischen Universalgelehrten Omar Khayyám um 1100, der seinerseits mit großer Wahrscheinlichkeit aus noch älteren arabischen oder chinesischen Quellen schöpfte. Der deutsche Mathematiker und protestantische Pfarrer Michael Stifel hat den Terminus Binomialkoeffizient um 1500 [richtig: 1544; C.B.] eingeführt: die explizite Formel findet sich dann bei Isaac Newton. Der mathematische Ausdruck – wenn auch nicht in dieser Schreibweise – und seine Interpretation als die Anzahl der Möglichkeiten, aus n Gegenständen r Stück auszuwählen, waren schon dem indischen Gelehrten Bhāskara im 12. Jahrhundert geläufig“ (Stewart 2004, 436).

Pascal entwickelte um die Jahreswende 1653/1654 für die Lösung eines Problems aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung diese Zahlenanordnung. Er untersuchte Glücksspiele zwischen zwei gleichwertigen Partnern bei vorzeitigem Spielabbruch. Mit Hilfe seines „Triangle Arithmétique“ (Arithmetisches Dreieck) fand er die Aufteilung des Spieleinsatzes zwischen den beiden Spielern, wenn bei einem beliebigen Spielstand abgebrochen wird (vgl. Buchheim 1994, 56).

2.2 Binomialkoeffizienten

Allgemein wird das Pascalsche Dreieck im Unterricht der Sekundarstufe bei der Berechnung der Binomialkoeffizienten behandelt.

Die Binomialkoeffizienten sind im Rahmen der Kombinatorik bei Kombinationen ohne Wiederholung ein wichtiges Werkzeug. Man bezeichnet damit die Anzahl aller k -elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge und schreibt dafür:

$\binom{n}{k}$, gelesen „n über k“.

Mit Hilfe des Fakultätssymbols lassen sich die Binomialkoeffizienten

$\binom{n}{k}$ schreiben als

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)(n-k) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{k(k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot (n-k) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Der Term $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ ist dabei zunächst nur für $0 < k < n$ definiert. Für $k = 0$

und für $k = n$ steht im Nenner der Faktor $0!$. Definiert man nun $0! = 1$, so erhält man

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Diese Vereinbarung über $0!$ ist sinnvoll, denn es gibt genau eine Teilmenge mit 0 Elementen, die leere Menge, und eine Teilmenge mit n Elementen, die n -Menge A selbst.

Die Symbole $\binom{n}{k}$ wurden von Euler eingeführt und werden Eulersche

Symbole genannt. Schreibt man nun die Binomialkoeffizienten in Form einer Tabelle, so erhält man die folgende Anordnung des Pascalschen Dreiecks (vgl. Selzer/Spiegel 2004, 298), die sich ähnlich schon bei dem persischen Mathematiker al-Ṭūsī im 13. Jahrhundert findet.

| n \ k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------|---|---|----|----|---|---|
| 0 | 1 | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 |

Ihr Name „Binomialkoeffizienten“ – bei Stifel (1544) „numeri binomiales“ – leitet sich von ihrem Auftreten im binomischen Lehrsatz ab:

$$(a + b)^n = \binom{n}{n} \cdot a^n + \binom{n}{n-1} \cdot a^{n-1} b^1 + \binom{n}{n-2} \cdot a^{n-2} b^2 + \dots + \dots$$

$$\binom{n}{2} \cdot a^2 \cdot b^{n-2} + \binom{n}{1} \cdot a^1 \cdot b^{n-1} + \binom{n}{0} \cdot b^n$$

Die Koeffizienten der Potenzprodukte $a^{n-k} b^k$ sind die oben eingeführten

Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$.

2.3 Symmetrie

Aus der Eigenschaft der Binomialkoeffizienten: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ kann die

Symmetrie des (gleichschenkligen) Pascalschen Dreiecks abgeleitet werden, da die Auswahl einer k -elementigen Teilmenge ihrem Komplement der $(n-k)$ -elementigen Teilmenge entspricht.

2.4 Zeilensummen

Die Summe der Binomialkoeffizienten in der n -ten Zeile beträgt 2^n (wenn man bei der Zählung der Reihen mit 0 beginnt). Es ergeben sich beim gliedweisen Ausmultiplizieren des Binoms gerade 2^n Produkte, die dann wie oben zusammengefasst werden können.

Geht man von der Kombinatorik aus, so entspricht die Zeilensumme der n -ten Reihe der Anzahl aller Teilmengen aus einer n -elementigen Menge (wenn man bei der Zählung der Reihen bei 0 anfängt). Die Anzahl aller Teilmengen einer n -elementigen Menge ist also 2^n .

Einen Beweis dieser Aussage durch vollständige Induktion zeigt das folgende Protokoll von Herrn Ast (Abb. 2).

vollst. Induktion (\Rightarrow rekursives Denken)

$|M| :=$ Anzahl der Elemente von M

1) $|M| = 1 \Rightarrow 2^1$ Teilmengen: \emptyset, M

2) Es gelte

$|M| = n \Rightarrow |P(M)| = 2^n$
 $\quad \quad \quad :=$ Menge aller Teil-
 $\quad \quad \quad$ mengen von M
 $\quad \quad \quad$ (daher auch Name
 $\quad \quad \quad$ "Potenzmenge")

Es sei $|M'| = n+1$

$\Rightarrow M' = M \cup \{x_{n+1}\}$ mit $|M| = n$

$\Rightarrow P(M')$ enthält aus $P(M)$, indem

① alle Elemente von $P(M)$
aufheben, dies sind (s.o.): $\underline{2^n}$
und

② indem zu jedem Element in $P(M)$
noch (nein) x_{n+1} als Element
hinzukommt, dies sind somit ebenfalls
 $\underline{2^n}$ weitere Elemente

$\Rightarrow |P(M')| = 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$

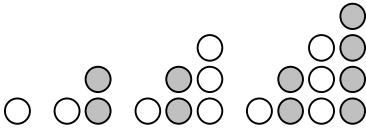
\Rightarrow Peano-Axiom: gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

Abb. 2: Zeilensumme. Beweis durch vollständige Induktion

2.5 Zahlenfolgen

In den diagonal zum Betrachter liegenden Zahlenreihen des Pascalschen Dreiecks lassen sich neben der Folge der natürlichen Zahlen auch ebene und räumliche „figurierte Zahlen“ (die ihren Namen nach möglichen geometrischen Anordnungen von Punkten in der Ebene oder im Raum haben) und weitere Zahlenfolgen finden:

- in der dritten Diagonalen die „Dreieckszahlen“ D_n : 1, 3, 6, 10, 15, 21,



die sich durch $D_1 = 1$ und $D_n = D_{n-1} + n$ (für $n > 1$) rekursiv beschreiben und durch $D_n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$ explizit berechnen lassen,

- in der vierten Diagonalen die „Tetraederzahlen“ T_n : 1, 4, 10, 20, 35, ... für die $T_1 = 1$ und $T_n = T_{n-1} + D_n$ (für $n > 1$) und $T_n = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)}{6}$ gilt.

- Addiert man schließlich im Pascalschen Dreieck die Zahlen gemäß der Vorschrift in Abb. 3., erhält man die Folge der „Fibonacci-Zahlen“ F_n : 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... mit der rekursiven Beschreibung $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n > 2$.

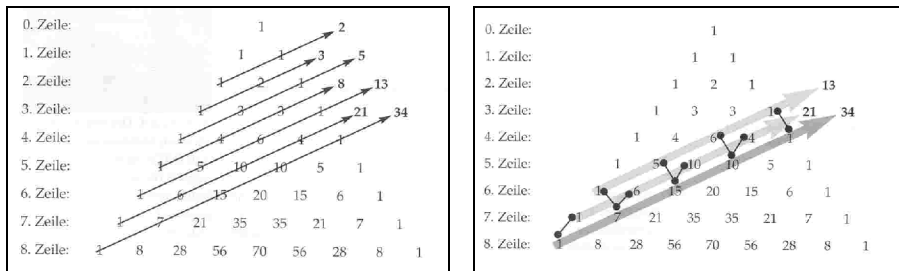


Abb. 3: Fibonacci-Zahlen (Wittmann/Ziegenbalg 2004, 234 und 235)

Die zweite Abbildung zeigt, dass der unterste Pfeil aufgrund der Rechenvorschrift (die beiden oberen Zahlen ergeben als Summe die darunter liegende Zahl) durch Addition der beiden darüber liegenden Pfeile entsteht.

Eine explizite Berechnung erlaubt die Formel von Binet:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right),$$

die hier (aufgezeichnet von Herrn Ast) aus der rekursiven Definition abgeleitet wird (Abb. 4).

Fibonacci: $F_{u+1} = F_u + F_{u-1}$ $F_0 = 0, F_1 = 1$

Ansatz: $F_u = x^u$

$$\Rightarrow x^{u+1} = x^u + x^{u-1}$$

$$\Rightarrow x^2 = x + 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

Lösungen:

$$\lambda = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), \quad \mu = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$$

$\Rightarrow \lambda^u, \mu^u$ sind Lösungen

und: auch jede Linearkombination

$$\boxed{c \cdot \lambda^u + d \cdot \mu^u} \text{ ist Lösung}$$

Bedingungen

$$F_0 = 0 = c \cdot \lambda^0 + d \cdot \mu^0 = \underline{c + d}$$

$$F_1 = 1 = c \cdot \lambda^1 + d \cdot \mu^1 = \underline{c \cdot \lambda + d \cdot \mu}$$

2 lineare Gleichungen für c, d :

$$\Rightarrow c = -d = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{\lambda - \mu}$$

$$\Rightarrow \boxed{F_u = c \cdot \lambda^u + d \cdot \mu^u = \frac{\lambda^u - \mu^u}{\lambda - \mu}}$$

Binet

[Für $u \rightarrow \infty$: $\frac{F_{u+1}}{F_u} \rightarrow \lambda = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$, goldener Schnitt]

Abb. 4: Formel von Binet

3 „Mathematik-treiben“ am Pascalschen Dreieck

Wenn Sie während Ihrer mathematischen Tätigkeit mehr Muster gefunden haben als vorgestellt sind, ist dieses nicht verwunderlich, denn die vorangehenden Beschreibungen der im Pascalschen Dreieck enthaltenen Muster sind ergänzungsbedürftig. Selbst Pascal, der weitaus mehr Muster entdeckte, schreibt: „Ich habe mehr Eigenschaften ausgelassen, als ich aufgeführt habe. Es ist erstaunlich, wie reichhaltig das Dreieck ist. Jedermann kann sein Glück versuchen“.

Dieses Zitat diente in den Unterrichtsprojekten als Aufforderung, selbst Muster und Strukturen im Pascalschen Dreieck zu finden.

In der Grundschule wurden zwei verschiedene ikonische Darstellungen des Pascalschen Dreiecks gewählt. Häufig werden die Orte für die Zahlen als Rechtecke dargestellt, ebenso können die Zahlen in Kreise eingetragen werden. Die Darstellung in Kreisen erleichtert es zum einen, die diagonal zum Betrachter liegenden Reihen im Dreieck zu sehen, zum anderen wird die äußere Form des Dreiecks leichter sichtbar als bei der Verwendung von Rechtecken.

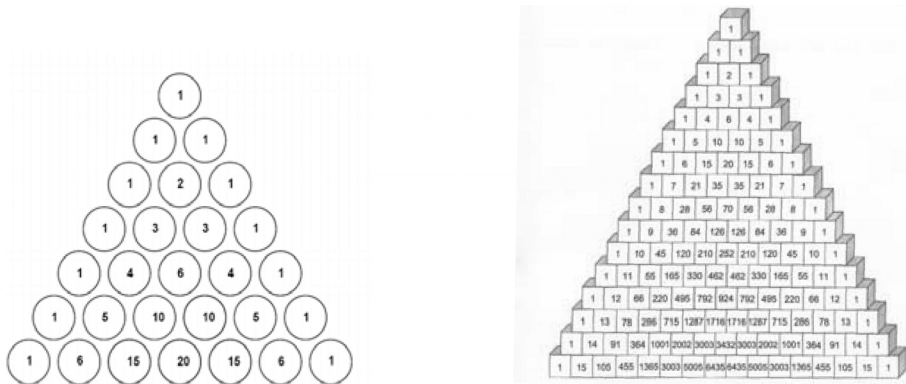


Abb. 5: Verschiedene Darstellungen des Pascalschen Dreiecks

Zu Beginn der Einheit wurde sowohl den Studierenden als auch den Kindern ein „angefangenes“ Dreieck präsentiert, mit der Aufgabe es weiter zu „gestalten“. In dieser Anfangsphase wurden in der Grundschule Begriffe geklärt, die zur späteren Kommunikation nützlich waren. So wurden die horizontal zum Betrachter liegenden Linien als Reihen und die diagonal zum Betrachter liegenden Reihen als Diagonalen oder schräge Reihen bezeichnet. Für die Kinder der 3. und 4. Klasse wurde Pascals Zitat sinngemäß zu folgender Aufforderung verändert: „Es ist erstaunlich, was einem alles auffallen kann. Jedermann soll sein Glück versuchen“. Dabei arbeiteten die Kinder der 4. Klasse alleine oder in Partnerarbeit und die Kinder der 3. Klasse in Gruppenarbeit.

Die Grundschul Kinder bekamen im weiteren Verlauf der Stunde noch spezielle Forscheraufträge, wie z.B.: „Schau dir die dritte Diagonale genau an!“ oder „Betrachte die einzelnen Reihen!“.

Kindern mit besonderem Förderbedarf wurden statt der Arbeitsaufträge „Forscherlupen“ an die Hand gegeben, die gezielt nur eine der diversen Entdeckungen „öffnen“ und damit die Konzentration unterstützen können. Bei den Forscherlupen (Abb. 6) wird die weiße Form ausgeschnitten, so dass immer nur ein bestimmter Ausschnitt sichtbar und betrachtet wird. Denn gerade bei einer so reichhaltigen mathematischen Aufgabe, die viele Entdeckungen gleichzeitig eröffnet, können die verschiedenen Möglichkeiten zu Verwirrung führen, und manchmal geben diese Kinder letztlich auf.

Verkleinerte Beispiele für die Forscherlupen Dreieck, Diagonale und Zeile:

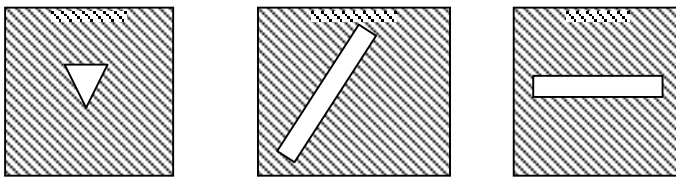


Abb. 6: Forscherlupen

4 Darstellung eigener Entdeckungen

In verschiedenen Unterrichtsprojekten in den Klassen 3 und 4 zeigte sich, dass die Kinder hoch motiviert und in der Lage sind, Mathematik zu treiben, wenn sie selbst einige der vielfältigen Strukturen und Muster entdecken. Dabei gab es natürlich Entdeckungen auf unterschiedlichen Stufen, wie z. B. „Außen steht immer eine 1“ oder „In jeder Reihe gibt es immer eine Zahl mehr“, während ein Kind in der 4. Klasse, inspiriert durch den „Zahlenteufel“ von Hans Magnus Enzensberger, sogar die Struktur der „Fibonacci-Zahlen“ entdeckte.

Beim Beschreiben, vor allem jedoch beim Darstellen ihrer Entdeckungen, ergaben sich für fast alle Kinder größere Hürden, die sie überwinden mussten. So entstand Gesprächsbedarf darüber, wie man seine eigenen Entdeckungen für andere darstellen kann. Die Möglichkeit einer grafischen Veranschaulichung war vielen Kindern am Anfang der Unterrichtseinheit fremd. Eigene Wege der Darstellung zu finden, war für manche Kinder sehr schwer, da sie es insbesondere im Mathematikunterricht gewohnt waren, Darstellungen bzw. Hefteinträge immer genau vorgegeben zu finden.

Im Laufe des Unterrichtsversuches wurden die Kinder „kreativ“ und am Ende der Unterrichtseinheit nutzten einige Kinder insbesondere grafische Darstellungen, wie in Abb. 7.

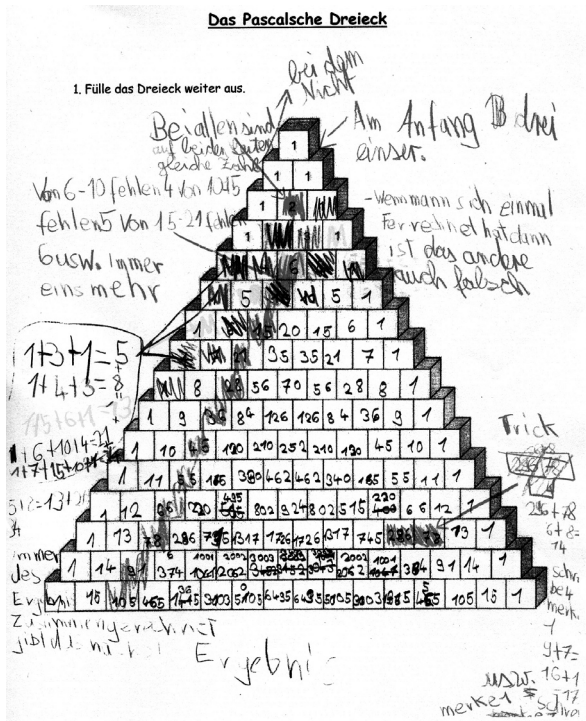


Abb. 7: Grafische Darstellungen von Entdeckungen (vgl. Farbbild 11)

Eine weitere Möglichkeit, Kindern bei der Fixierung ihrer Entdeckungen Hilfestellungen zu geben, kann darin bestehen, sie immer wieder zu ermutigen, eigene kurze Sätze oder Stichworte zu formulieren. Eine erste Annäherung kann durch die Aufforderung gelingen, anderen Kindern oder der Lehrkraft die Entdeckung zu diktieren.

Das vorangegangene und die folgenden Beispiele stammen aus einem Unterrichtsprojekt von Weiß (2005) in Klasse 4. Sie zeigen, wie Kinder die Symmetrie entdeckten und auch verallgemeinernd beschrieben.



Abb. 8: Kinderbeschreibung zur Symmetrie

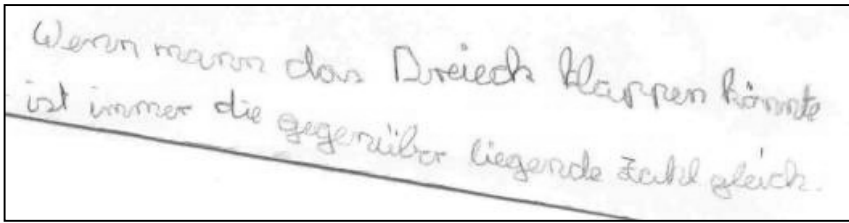


Abb. 9: Kinderbeschreibung zur Symmetrie

Auch die Beziehung zwischen den einzelnen Zeilensummen wurde von einigen Kindern erkannt.

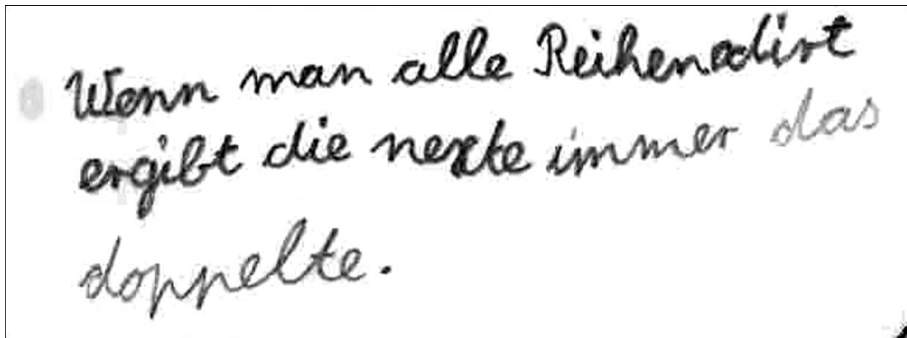


Abb. 10: Kinderproduktion zur Zeilensumme

Selbst die Regelmäßigkeit der dritten Diagonale wurde von den Kindern schon verallgemeinernd dargestellt.

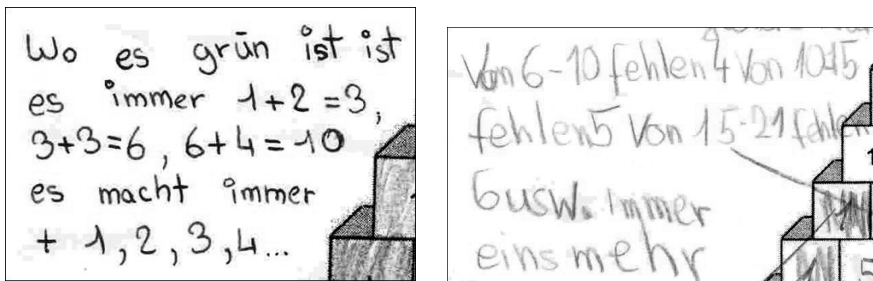


Abb. 11: Beschreibungen der Dreieckszahlen (vgl. Farbbild 12)

In beiden Unterrichtsprojekten wurde neben der Vielfalt der Entdeckungen auch eine Begeisterung der Kinder über ihre Erfolge deutlich. Die Kinder einer dritten Klasse änderten beispielsweise die Bezeichnung des Pascalschen Dreiecks in „Unser Kinderdreieck“. Schließlich hatten sie selbst viel an diesem Dreieck entdeckt, also war es nun nicht mehr Pascals Dreieck, sondern *ihr* Dreieck.

Wie bereits erwähnt, wurde auch Studierenden das Zitat von Blaise Pascal als Aufforderung gestellt, nach einzelnen Mustern und Strukturen zu suchen, allerdings wurde von ihnen noch zusätzlich eine Begründung bzw. ein Beweis für ihre Entdeckungen gefordert.

Das folgende Beispiel stammt aus einer Veranstaltung in der Hochschule mit Studierenden, die das Fach Mathematik in ihrem Studium gewählt haben.

Pascalsches Dreieck

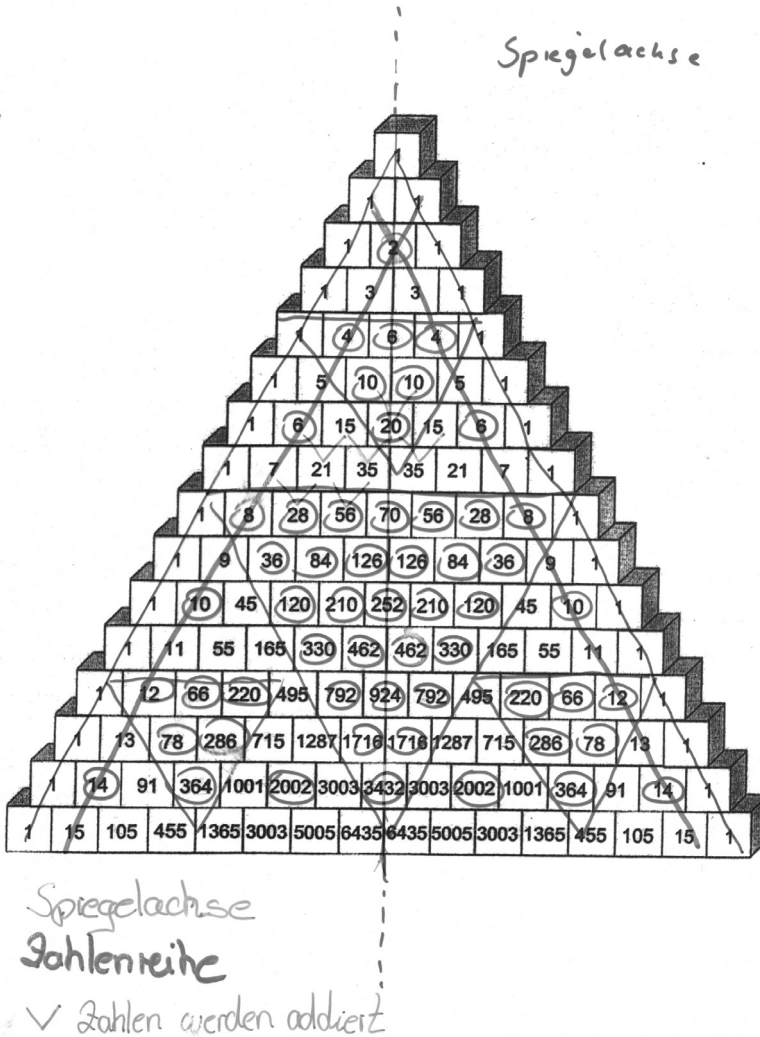


Abb. 12: Studierendenproduktion

Abb. 12 stellt die ersten Ergebnisse einer Gruppenarbeit dar. Interessanterweise konnte man bei den Studierenden die gleichen Probleme beobachten wie bei den Kindern. Nicht das Entdecken von Mustern war die größte Hürde, sondern die Darstellung der Ergebnisse. Beim gemeinsamen Kommunizieren darüber wurde den Studierenden deutlich, dass Beschreiben, Darstellen und Begründen schon auf dieser Stufe anspruchsvolle mathematische Tätigkeiten sind, die große Anforderungen an sie stellen und ihnen nicht sehr vertraut sind (vgl. Steinweg 2001).

Diese Erfahrung benötigen Studierende schon in ihrem Studium, um zu erleben, was es heißt „Mathematik zu treiben“. Dabei werden eingefahrene Haltungen und einseitige Sichtweisen von Mathematik aufgebrochen und zugleich negative Erfahrungen überwunden. Dies kann insbesondere über eine aktive Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten, wie hier am Pascalschen Dreieck, gelingen. Studierende müssen eigene bzw. neue Erfahrungen hinsichtlich „Mathematik-treiben“ machen, um dann über diese mathematischen Prozesse zu reflektieren (vgl. Walter 1999).

Bei den Studierenden lässt die Erforschung des Pascalschen Dreiecks Entdeckungen auf unterschiedlichen Niveaus zu. Sie finden in einer ersten Phase ähnliche Strukturen und machen ähnliche Erfahrungen im Prozess des Entdeckens wie die Kinder. Man sollte das Niveau einer Hochschulveranstaltung jedoch nicht dem Niveau einzelner Schuljahre anpassen, sondern man sollte in einer zweiten Phase im Sinne einer didaktischen Phänomenologie und im Anschluss an entdeckte Phänomene, Strukturen und Muster weiterführende Verallgemeinerungen und Theorien folgen lassen: z. B. um formale Beweisverfahren kennen zu lernen wie jenes der vollständigen Induktion bei der Beweisführung der Formel für die Zeilensummen (Abb. 2) oder solche wie bei der Formel von Binet (Abb. 4).

Fazit

Am Anfang dieses Artikels stand die Frage, welche Rolle die Mathematik in der Ausbildung für das Grundschullehramt spielen soll. Wie deutlich werden sollte, sind eigene Erfahrungen mit Mathematik wichtig, damit Studierende ein reichhaltiges Verständnis von Mathematik entwickeln können. Dafür sind immer wieder Aufgabenformate wie das Pascalsche Dreieck notwendig, welche Möglichkeiten zum Entdecken, Problemlösen, Darstellen und Argumentieren eröffnen. Nur so können die Studierenden ihre mathematischen Kenntnisse und Fertigkeiten vertiefen und erweitern und den für ihren Unterricht notwendigen fachwissenschaftlichen Hintergrund erwerben. Eine praxisbezogene fachwissenschaftliche Ausbildung ist deshalb eine notwendige wenn auch nicht hinreichende Voraussetzung, damit Studierende später in der Lage sind, ihre eigenen Schülerinnen und Schülern Wege beschreiten zu lassen, die nicht normiert und vorgegeben sind (vgl. Selzer 1995).

Literatur

- Benz, C. / Steinweg, A. S. (2007). Unterwegs in Musterlandschaften. *Praxis Förderschule*.
- Buchheim, R. (1994). Fraktale Strukturen im Pascalschen Dreieck. *mathematik lehren* Feb. (62), 56–57.
- Devlin, K. (1997). *Mathematics. The Science of Patterns*. Second Printing. New York: Scientific American Library.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Stuttgart: Klett.
- Freudenthal, H. (1982). Mathematik – eine Geisteshaltung. *Grundschule* (4), 140–142.
- Grigutsch, S. / Raatz, U. / Törner, G. (1998). Einstellung gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. *Journal für Mathematik-Didaktik* H.1, 3–45.
- Kultusministerkonferenz. (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich*.
- Selter, C. (1995). Entwicklung von Bewußtheit. *Journal für Mathematik-Didaktik* H.1/2, 115–144.
- Selter, C. / Spiegel, H. (2004). Elemente der Kombinatorik. In: Müller, G. / Steinbring, H. / Wittmann, E. Ch. (Hrsg.). *Arithmetik als Prozess*. Seelze: Kallmeyer, 291–310.
- Selter, C. / Spiegel, H. (2003). *Kinder & Mathematik. Was Erwachsene wissen sollten*. Seelze: Kallmeyer.
- Steinweg, A. S. (2001). *Zur Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses bei Kindern*. Münster: Lit.
- Steinweg, A. S. (2003). Gut, wenn es etwas zu entdecken gibt – Zur Attraktivität von Zahlen und Mustern. In: Ruwisch, S. / Peter-Koop, A. (Hrsg.). *Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule*. Mildenerger, 56–74.
- Stewart, I. (2004). *Pentagonien, Andromeda und die gekämmte Kugel*. München: Spektrum Akademischer Verlag.
- Terhart, E. (2000). *Perspektiven der Lehrerbildung in Deutschland*. Abschlussbericht der von der Kultusministerkonferenz eingesetzten Kommission, Weinheim/Basel.
- Walter, M. (1999). Am liebsten habe ich nur gerechnet.... – Reflexionen zu Einstellungen von Lehramtsstudenten zur Mathematik und zum Mathematikunterricht. *Beiträge zum Mathematikunterricht*. Hildesheim: Franzbecker.
- Weiß, A. (2005). *Natürliche Differenzierung mit Hilfe von substantiellen Aufgabenformaten*. Unveröffentlichte Staatsexamensarbeit Heidelberg.
- Wittmann, E. Ch. (2003). Was ist Mathematik und welche pädagogische Bedeutung hat das wohlverstandene Fach auch für den Mathematikunterricht in der Grundschule. In: Baum, M. / Wielpütz, H. *Mathematik in der Grundschule. Ein Arbeitsbuch*. Seelze: Kallmeyer, 18–46.
- Ziegenbalg, J. / Wittmann, E. Ch. (2004). Zahlenfolgen und vollständige Induktion. In: Müller, G. / Steinbring, H. / Wittmann, E. Ch. (Hrsg.). *Arithmetik als Prozess*. Seelze: Kallmeyer, 207–235.

Ein Diagnosebogen zur flexiblen Subtraktion

Summary

The present paper starts from the statement that assessment should primarily provide teachers and children with information about individual competences and deficits, which form an important basis for supporting individual learning processes. The so-called maths-letterbox and diagnostic sheets are described by means of an example dealing with flexible non-standard-algorithmic subtraction.

In Deutschland wird bekanntlich seit einigen Jahren vergleichsweise intensiv über Bildung und Erziehung diskutiert – nicht nur, aber wesentlich auch in Folge der Auseinandersetzung mit den PISA-Studien der Jahre 2000 und 2003. Manchmal kann man jedoch den Eindruck gewinnen, als würden aus dem mittelmäßigen Abschneiden der deutschen Mitstufenschülerinnen und -schüler die unterschiedlichsten Konsequenzen abgeleitet, wie etwa Abschaffung oder Erhalt des gegliederten Schulwesens, früherer oder späterer Zeitpunkt der Verbindlichkeit von Ziffernnoten, Einführung oder Abschaffung zentraler Lernstandserhebungen, ...

1 Leistungsfeststellung –Basis individueller Förderung

Informiert man sich hingegen direkt ‚an der Quelle‘, so wird beispielsweise von finnischen Kolleginnen und Kollegen häufig angeführt, dass ihr Land in internationalen Vergleichsuntersuchungen wohl nicht zuletzt deshalb vergleichsweise gut abschneide, weil es dort eine *Kultur der Ermutigung* gebe. Man gehe davon aus, dass Schülerinnen und Schüler sich ernst genommen und wohl fühlen müssten, um lernen und leisten zu können. Dazu gehöre selbstverständlich auch, dass in Finnland Leistungsanforderungen von Anfang an transparent gemacht würden.

Die primäre Funktion der Leistungsfeststellung in der Schule besteht demnach darin, Lernentwicklungen und Lernergebnisse vor dem Hintergrund individueller Vorerfahrungen einerseits und verbindlicher Anforderungen andererseits zu dokumentieren. Der Lehrerin dient dieses als Grundlage für individuelle Förderung. Aus der Sicht der Kinder stellt es eine Hilfe bei der Mitplanung und der Mitsteuerung des eigenen Lernprozesses dar.

Natürlich gehört es auch zum Auftrag von Schule, Entscheidungen über Versetzungen und Nicht-Versetzungen, über Schullaufbahnen und Abschlussniveaus zu treffen – dieses in Deutschland bedauerlicher Weise schon in recht jungem Alter. Schule kann dieses Spannungsverhältnis von *Entwicklungsfunktion* und *Auslesefunktion* schlichtweg nicht beseitigen. Aber sie kann trotz dieses Dilemmas versuchen, mit den Leistungen der Kinder verantwortlich umzugehen, also durch individuelle Förderung die Lernfreude der Kinder zu erhalten und deren Leistungsfähigkeit zu entwickeln.

Der vorliegende Beitrag beschreibt mit den Diagnoseblättern, die die Schülerinnen und Schüler in den sog. Mathebriefkasten werfen, ein diesbezügliches Beispiel. Für weitere Ideen und Beispiele verweisen wir auf Sundermann / Selter (2006 bzw. 2006a).

2 Der Mathebriefkasten

Für ein authentisches Bild dessen, was Kinder leisten, ist es unverzichtbar, mit *leistbarem Aufwand* auch deren ‚Alltagsleistungen‘ zu dokumentieren. Nicht zuletzt auf dieser Grundlage können individuelle Fördermaßnahmen – keineswegs nur für die schwächeren Schüler – geplant werden.

Einen regelmäßigen Einblick in individuelle Leistungsstände erhält man beispielsweise, indem man einen sog. Mathebriefkasten einrichtet – einen mit gelbem Papier beklebten Schuhkarton mit Schlitz.

In diesen Briefkasten werfen die Kinder individuelle Aufgabenbearbeitungen, die nicht mehr als fünf bis zehn Minuten in Anspruch genommen haben sollten. Vorab hat die Lehrerin am Ende – oder in Ausnahmefällen auch am Beginn – einer Unterrichtsstunde, eines Tages oder einer Lerneinheit eine A5- oder A6-Karteikarte bzw. ein Arbeitsblatt ausgeteilt. Darauf notieren die Schüler zunächst Namen und Datum sowie die Antwort auf eine Frage bzw. die Bearbeitung einer Kurzaufgabe.

Die Art der Aufgabenstellung hängt natürlich davon ab, was im Zusammenhang mit dem bereits durchgeführten oder dem noch bevorstehenden Unterricht erhoben werden soll. Sie kann sich beispielsweise auf die Verfügbarkeit von Kenntnissen oder Fertigkeiten, das Verständnis von Verfahren oder Konzepten oder die Ausprägung von Haltungen oder Einstellungen beziehen. Beispielaufgaben sind ...

- Schreibe auf, wie du 701–698 rechnest. Schreibe dann noch einen weiteren Rechenweg auf.
- Schreibe fünf Malaufgaben mit dem Ergebnis 1000 auf.
- Runde 1251 auf Hunderter und beschreibe, warum du so vorgehst.
- Erkläre, warum bei der Addition von zwei ungeraden Zahlen immer eine gerade Zahl herauskommt.
- Schreibe auf, was du heute gelernt (gemacht) hast.
- Schreibe eine Frage oder eine Idee auf, die du zur heutigen Stunde (zu einem bestimmten Lerninhalt) hast.

Denkbar ist hier – mit Ausnahme des letztgenannten Auftrags – neben einer globalen Einschätzung (richtig bzw. nicht richtig) eine differenziertere Beurteilung, etwa auf einer mehrstufigen Skala, die von +++ bis – reicht.

3 Aufbau des Diagnosebogens

Ein ausführlicheres Beispiel geben wir im Folgenden, indem wir den Aufbau eines Diagnosebogens zur flexiblen halbschriftlichen Subtraktion vorstellen, die von 228 Schülerinnen und Schülern gezeigten Vorgehensweisen analysieren und einen Auswertungsvorschlag für den Einsatz in der Unterrichtspraxis entwickeln.

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| Name: _____ | Datum: _____ |
| Verschiedene Wege zum gleichen Ziel | |
| Schreibe zwei verschiedene Rechenwege zu jeder Aufgabe auf! | |
| <p>a) $358 - 347 =$</p> <p>Mein Rechenweg Nr. 1:</p> <p>Mein Rechenweg Nr. 2:</p> <p>b) $746 - 298 =$</p> <p>Mein Rechenweg Nr. 1:</p> <p>Mein Rechenweg Nr. 2:</p> | |

Abb. 1: Der Diagnosebogen

Unter dem Titel ‚Verschiedene Wege zum gleichen Ziel‘ erhalten die Kinder folgenden Auftrag: „Schreibe zwei verschiedene Rechenwege zu jeder Aufgabe auf!“ (Abb. 1). Dabei ist nicht nur zu erkennen, welche Kinder von sich aus flexibel rechnen, sondern auch, welche Kinder überhaupt in der Lage sind, verschiedene Wege für eine Aufgabe zu finden. Denn dies ist ja die Voraussetzung für flexibles Rechnen: Um die günstigste Strategie für eine Aufgabe auswählen zu können, müssen mehrere Strategien bekannt sein und in Betracht gezogen werden.

Das Arbeitsblatt enthält zwei Subtraktionsaufgaben, beide sind so konstruiert, dass sie mit deutlich unterschiedlichen Strategien lösbar sind. Bei der Aufgabe $358 - 347 = 11$ liegen Minuend und Subtrahend nah beieinander, so dass sich die Strategie des Ergänzens besonders anbietet. Schwierigkeiten können kaum auftreten, da keine Stelle im Minuenden kleiner ist als im Subtrahenden. Aus diesem Grund ist die Lösung auch leicht schritt- oder stellenweise zu erhalten; beim stellenweisen Rechnen ist hier lediglich die Null in der Hunderterstelle der Differenz zu beachten.

Bei $746 - 298 = 448$ bietet sich eine Hilfsaufgabe ($746 - 300$) an, da sie die Aufgabe in zwei leichtere Teilrechnungen zerlegt, wobei allerdings die Ausgleichsrichtung beachtet werden muss, Probleme mit dem Zehner- bzw. Hunderterübergang aber vermieden werden. Selbstverständlich ist die Aufgabe auch durch Ergänzen oder stellen- und schrittweises Rechnen zu lösen, wobei sich insbesondere beim stellenweisen Subtrahieren Probleme ergeben können ($40 - 90$; $6 - 8$).

4 Auswertung des Diagnosebogens

Der Diagnosebogen wurde im zweiten Halbjahr des 3. Schuljahres vor der Behandlung der schriftlichen Subtraktion 228 Schülerinnen und Schülern aus vier verschiedenen Schulen vorgelegt. Folgende Leitfragen lagen der Auswertung zugrunde:

- Notieren die Schülerinnen und Schüler zwei Wege?
- Wenn ja, handelt es sich um verschiedene Hauptstrategien oder um Varianten einer Strategie?
- Führt das gezielte Suchen zweier Wege dazu, dass die Kinder eher (auch) eine aufgabenspezifische Strategie finden?

4.1 Rechenstrategien

Zunächst ist festzuhalten, dass es eine ganze Reihe von Schülern gibt, die keinen zweiten Rechenweg notieren. Im Vergleich der einzelnen Klassen lassen sich z. T. erhebliche diesbezügliche Unterschiede feststellen: Diagramm 1 zeigt zum Einen, wie viele Kinder in jeder Klasse wie viele Rechenwege finden, und zum Anderen die Durchschnittswerte (unterer Diagrammbalken).

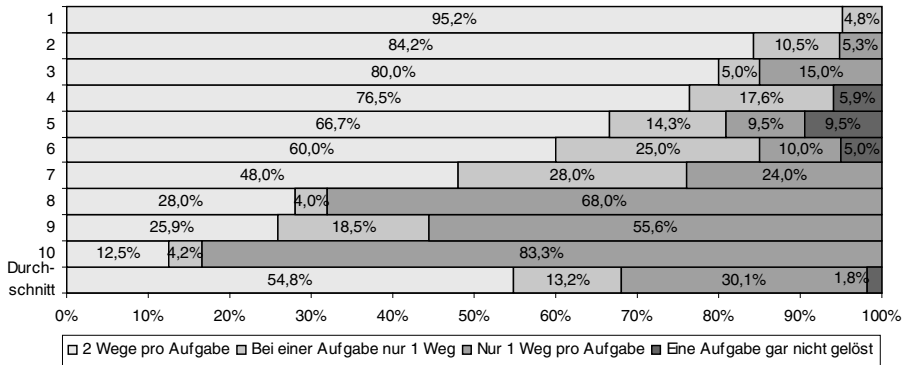


Diagramm 1: Rechenstrategien der einzelnen Klassen und Durchschnittswert

Während in einer Klasse alle Kinder mindestens eine Aufgabe auf zwei verschiedenen Wegen berechnen, ist dies bei anderen Klassen eher die Ausnahme. Es kann vermutet werden, dass die Fähigkeit des Rechnens auf verschiedenen Wegen abhängig ist von der Art und Zielsetzung des jeweiligen Unterrichts.

Sicherlich gibt es auch Kinder, die nicht motiviert genug sind, einen zweiten Lösungsweg zu suchen, wenn sie das Ergebnis schon ermittelt haben. Dies wird aber eher bei Einzelnen der Fall sein, während grundsätzlich davon auszugehen ist, dass die Schüler es nicht gewohnt sind, über verschiedene Herangehensweisen nachzudenken.

Bezüglich der verwendeten Rechenstrategien fällt das vergleichsweise seltene Vorkommen der Strategie ‚Hilfsaufgabe‘ auf, auch bei der Aufgabe mit dem Minuenden 298. Die Strategie ‚Vereinfachen‘ (746–298 wird zu 748-300) konnte bei keinem Kind beobachtet werden.

Im Übrigen dominiert das schrittweise Rechnen; bei ca. 1/5 dieser Lösungswege wird dabei der Rechenstrich zur Notation genutzt (Diagramm 2, schraffierte Fläche). Vergleichsweise häufig kommt der Rechenstrich beim Ergänzen zum Einsatz, dabei handelt es sich allerdings überwiegend um Kinder derselben Klasse.

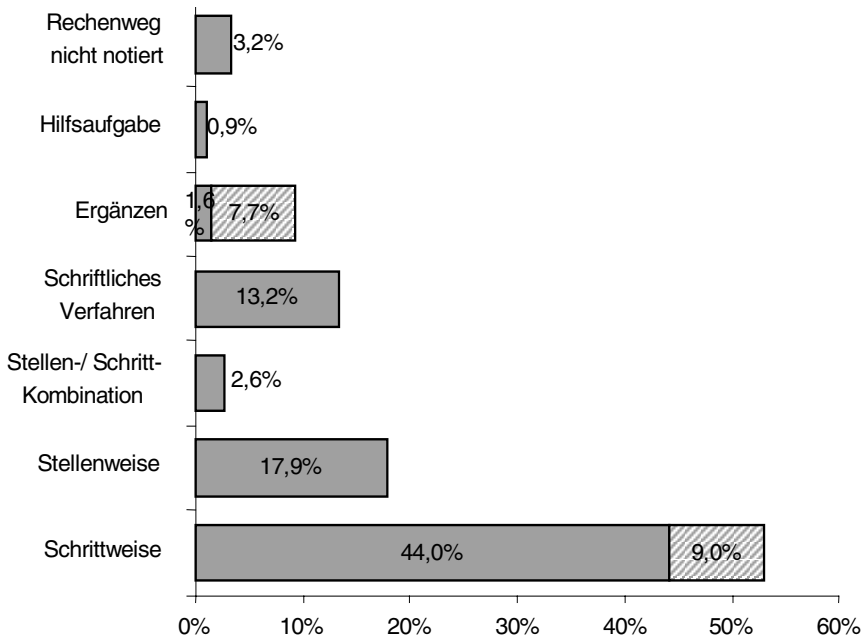


Diagramm 2: Häufigkeit der verwendeten Strategien

4.2 Kombinationen von Strategien

Tabelle 1 zeigt nun, welche Rechenstrategien die Schüler kombinieren, wenn sie zwei Lösungswege notieren. Grau hinterlegt sind Kombinationen, die aus gleichen oder sehr ähnlichen Wegen bestehen. In der Diagonalen befinden sich solche, bei denen lediglich die einzelnen Rechenschritte vertauscht oder anders notiert werden. In den übrigen Fällen werden zwei verschiedene Hauptstrategien kombiniert.

| | Schrittweise | Stellenweise | Stellen/Schritt | Schriftlich | Ergänzen | Hilfsaufgabe |
|-----------------------------|--------------|--------------|-----------------|-------------|----------|--------------|
| Schrittweise | 36,2 | 15,1 | 2,6 | 6,8 | 16,6 | 1,5 |
| Stellenweise | | 7,9 | --- | 5,7 | 2,6 | --- |
| Stellen/Schritt-Kombination | | | 0,8 | --- | --- | --- |
| Schriftlich | | | | --- | 1,5 | --- |
| Ergänzen | | | | | 2,3 | --- |
| Hilfsaufgabe | | | | | | 0,4 |

Tabelle 1: Häufigkeit der jeweiligen Strategiekombinationen (in %)

Die Werte lassen erkennen, dass sich die verschiedenen Kombinationen zu etwa der Hälfte aus Varianten derselben Hauptstrategie und zur anderen Hälfte aus grundlegend verschiedenen Strategien zusammensetzen. Hier scheint dem Unterricht große Bedeutung zuzukommen, denn die meisten Klassen weisen typische Kombinationen auf (Diagramm 3).

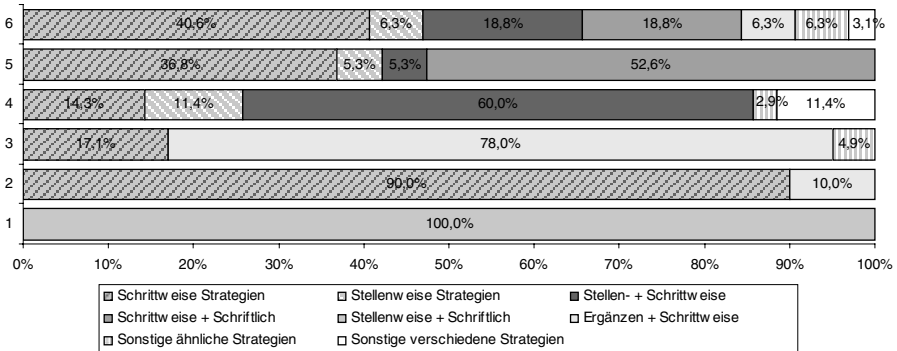


Diagramm 3: Unterschiede zwischen sechs ausgewählten Klassen

So werden in einer Klasse nur stellenweises und schriftliches Rechnen kombiniert, in einer anderen werden 90% der auf zwei Wegen gerechneten Aufgaben schrittweise einmal mit und einmal ohne Rechenstrich notiert usw. Der in Tabelle 1 aufgeführte Anteil der Kombinationen von schrittweisem und ergänzendem Rechnen ist ebenfalls i. W. auf eine einzelne Klasse zurückzuführen, in der fast alle Kinder diese beiden Strategien verwenden.

Die Vielfalt der verwendeten Kombinationen lässt also zunächst wieder Rückschlüsse auf den Unterricht zu – die Kinder wenden prinzipiell die Strategien am häufigsten an, die entsprechend im Unterricht thematisiert werden. Dabei reicht die Spanne von einer Klasse, in der nur zwei Strategien vorkommen bis hin zu einer Klasse, deren Schülerbearbeitungen insgesamt alle sechs Strategien aufweisen.

Was bei der Gesamtheit der bearbeiteten Aufgaben zu sehen ist, trifft auch auf die Schüler zu: Sowohl von den Schülern, die bei beiden Aufgaben zwei Rechenwege notieren, als auch von denen, die nur einmal einen zweiten Weg finden, gilt, dass etwa die Hälfte von ihnen ähnliche und die andere Hälfte grundlegend verschiedene Strategien verwendet.

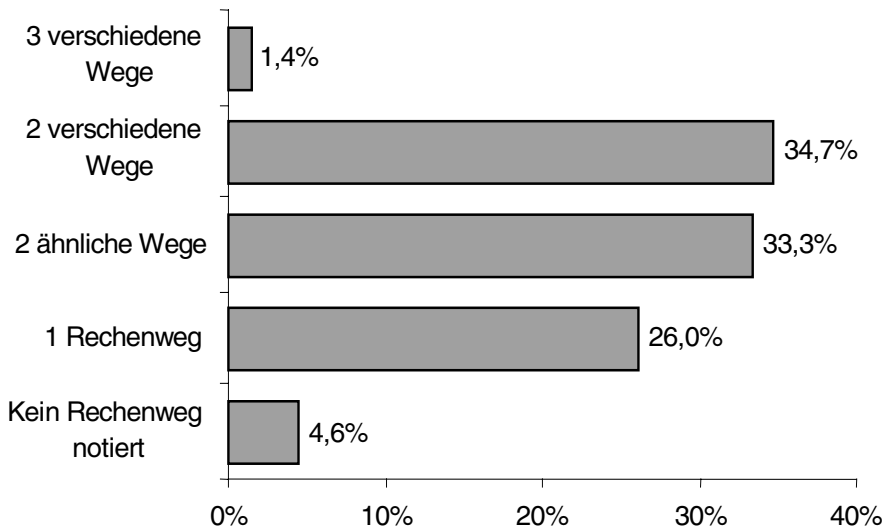


Diagramm 4: Anzahl der verwendeten Rechenwege pro Schüler

Nur ca. 10% der Schüler mit zwei Rechenwegen rechnen z. B. bei Aufgabe a) mit Strategievarianten und bei Aufgabe b) mit verschiedenen Hauptstrategien. Diese sind auch fast die einzigen, die bei den beiden Aufgaben überhaupt unterschiedlich rechnen: 88% der Schüler mit zwei Rechenwegen benutzen bei Aufgabe b) die gleichen Strategien wie bei Aufgabe a). Dementsprechend ist es auch nicht verwunderlich, dass kaum ein Schüler bei seiner Bearbeitung mehr als zwei Rechenstrategien verwendet, wie Diagramm 4 zeigt.

5 Auswertungsvorschlag

Da es bei diesem Diagnosebogen schwerpunktmäßig darum geht, verschiedene Herangehensweisen zu einer Subtraktionsaufgabe zu finden, sollte die Bewertung maßgeblich durch die Rechenwege bestimmt sein.

Bei der Vergabe von Punkten kann man sich an folgenden Kriterien orientieren: Für korrekte Ergebnisse und verständliche Darstellungen der Rechenwege gibt es einen Punkt. Dieser wird nicht vergeben, wenn nur ein Ergebnis richtig ist, da es sich ja nur um zwei Aufgaben handelt, wovon die erste fast keine Schwierigkeiten bietet; allerdings kann eine Bearbeitung mit einem falsch abgeschrieben Zahlenwert, aber korrekter Lösung als richtig bewertet werden.

Die Notation von zwei Rechenwegen zu jeder Aufgabe wird ebenfalls mit einem Punkt bewertet; handelt es sich dabei jeweils um zwei verschiedene Hauptstrategien, werden zwei Punkte vergeben. Mit einem weiteren Punkt kann man außerdem den Einsatz geschickter, aufgabenspezifischer Rechenstrategien honorieren.

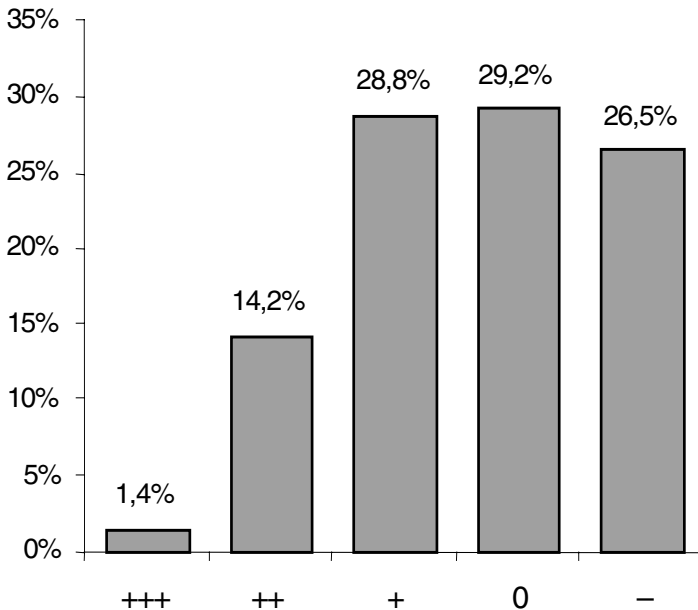
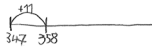
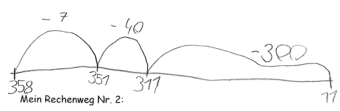
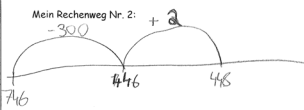
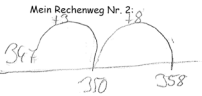
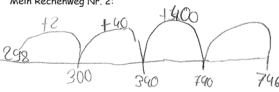
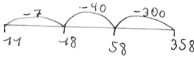
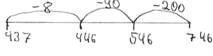


Diagramm 5: Häufigkeit des Auftretens der Bewertungskategorien

Das obige Diagramm zeigt die jeweiligen Anteile der fünf Bewertungskategorien an den Schülerlösungen, die nach den vorgestellten Kriterien ausgewertet sind. In der nachfolgenden Tabelle werden einige typische Schülerlösungen den Bewertungskriterien zugeordnet. Welcher Grad an mathematischer Korrektheit z. B. bei der Notation der Rechenwege erwartet wird, ist allerdings von den im jeweiligen Unterricht getroffenen Abmachungen abhängig.

| Bewertungskriterien mit Beispielen | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| +++ | Jeweils zwei grundlegend verschiedene Rechenwege, mind. eine aufgabenspezifische Strategie, korrekte Ergebnisse und Notation |
| Verschiedene Wege zum gleichen Ziel Schreibe zwei verschiedene Rechenwege zu jeder Aufgabe auf! | Verschiedene Wege zum gleichen Ziel Schreibe zwei verschiedene Rechenwege zu jeder Aufgabe auf! |
| <p>a) $358 - 347 = 11$</p> <p>Mein Rechenweg Nr. 1: $347 + 11 = 358$ </p> <p>Mein Rechenweg Nr. 2: $358 - 300 = 58$ $58 - 40 = 18$ $18 - 7 = 11$</p> <p>b) $746 - 298 =$</p> <p>Mein Rechenweg Nr. 1: $298 + 18 = 716$ $716 + 300 = 1016$ $1016 - 746 = 270$ $270 + 120 = 390$ $390 - 298 = 92$</p> <p>Mein Rechenweg Nr. 2: $746 - 200 = 546$ $546 - 90 = 456$ $456 - 8 = 448$</p> | <p>a) $358 - 347 = 11$</p> <p>Mein Rechenweg Nr. 1: $358 - 300 = 58$ $58 - 40 = 18$ $18 - 7 = 11$</p> <p>Mein Rechenweg Nr. 2: $358 - 350 = 8$ $8 + 3 = 11$</p> <p>b) $746 - 298 = 448$</p> <p>Mein Rechenweg Nr. 1: $746 - 200 = 546$ $546 - 90 = 456$ $456 - 8 = 448$</p> <p>Mein Rechenweg Nr. 2: $746 - 300 = 446$ $446 + 2 = 448$</p> |
| ++ | Jeweils zwei grundlegend verschiedene, aber nicht aufgabenspezifische Rechenwege, korrekte Ergebnisse und Notation |
| Verschiedene Wege zum gleichen Ziel Schreibe zwei verschiedene Rechenwege zu jeder Aufgabe auf! | Verschiedene Wege zum gleichen Ziel Schreibe zwei verschiedene Rechenwege zu jeder Aufgabe auf! |
| <p>a) $358 - 347 = 11$</p> <p>Mein Rechenweg Nr. 1: $358 - 300 = 58$ $58 - 40 = 18$ $18 - 7 = 11$</p> <p>Mein Rechenweg Nr. 2: $300 - 300 = 0$ $58 - 40 = 18$ $18 - 7 = 11$</p> <p>b) $746 - 298 = 448$</p> <p>Mein Rechenweg Nr. 1: $446 - 200 = 246$ $246 - 90 = 156$ $156 - 8 = 148$</p> <p>Mein Rechenweg Nr. 2: $400 - 200 = 200$ $40 - 90 = -50$ $6 - 8 = -2$ $200 - 50 - 2 = 148$</p> | <p>a) $358 - 347 = 11$</p> <p>Mein Rechenweg Nr. 1:  Mein Rechenweg Nr. 2: $358 - 340 = 18$ $18 - 7 = 11$</p> <p>b) $746 - 298 =$</p> <p>Mein Rechenweg Nr. 1: $746 - 300 = 446 + 2 = 448$</p> <p>Mein Rechenweg Nr. 2: </p> |

| + | Jeweils zwei grundlegend verschiedene Rechenwege, Mängel bei Ergebnissen und/ oder Notation | Jeweils zwei ähnliche Rechenwege, korrekte Ergebnisse und Notation |
|---|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| | <p style="text-align: center;">Verschiedene Wege zum gleichen Ziel Schreibe zwei verschiedene Rechenwege zu jeder Aufgabe auf!</p> <p>a) $358 - 347 = 11$</p> <p>Mein Rechenweg Nr. 1: $358 - 300 = 58$ $58 - 47 = 11$ $358 - 347 = 11$</p> <p>Mein Rechenweg Nr. 2: </p> <p>b) $746 - 298 = 444$</p> <p>Mein Rechenweg Nr. 1: $746 - 200 = 546$ $546 - 90 = 444$</p> <p>Mein Rechenweg Nr. 2: </p> | <p style="text-align: center;">Verschiedene Wege zum gleichen Ziel Schreibe zwei verschiedene Rechenwege zu jeder Aufgabe auf!</p> <p>a) $358 - 347 = 11$</p> <p>Mein Rechenweg Nr. 1: $358 - 347 = 11$ $358 - 300 = 58$ $58 - 40 = 18$ $18 - 7 = 11$</p> <p>Mein Rechenweg Nr. 2: $358 - 347 = 11$ $358 - 7 = 351$ $351 - 40 = 311$ $311 - 300 = 11$</p> <p>b) $746 - 298 = 448$</p> <p>Mein Rechenweg Nr. 1: $746 - 298 = 448$ $746 - 200 = 546$ $546 - 80 = 466$ $466 - 8 = 458$</p> <p>Mein Rechenweg Nr. 2: $746 - 298 = 448$ $746 - 8 = 738$ $738 - 90 = 648$ $648 - 200 = 448$</p> |
| 0 | <p style="text-align: center;">Jeweils zwei ähnliche Rechenwege, Mängel bei Ergebnissen und/ oder Notation Schreibe zwei verschiedene Rechenwege zu jeder Aufgabe auf!</p> <p>a) $358 - 347 = 11$</p> <p>Mein Rechenweg Nr. 1: $358 - 300 = 58$ $58 - 40 = 18$ $18 - 7 = 11$</p> <p>Mein Rechenweg Nr. 2: </p> <p>b) $746 - 298 = 437$</p> <p>Mein Rechenweg Nr. 1: $746 - 200 = 546$ $546 - 90 = 446$ $446 - 8 = 437$</p> <p>Mein Rechenweg Nr. 2: </p> | <p style="text-align: center;">Jeweils nur ein Rechenweg, aber korrekte Ergebnisse und Notation Schreibe zwei verschiedene Rechenwege zu jeder Aufgabe auf!</p> <p>a) $358 - 347 = 11$</p> <p>Mein Rechenweg Nr. 1: $358 - 300 = 58$ $58 - 40 = 18$ $18 - 7 = 11$</p> <p>Mein Rechenweg Nr. 2: $358 - 347 = 11$</p> <p>b) $746 - 298 = 448$</p> <p>Mein Rechenweg Nr. 1: $746 - 200 = 546$ $546 - 90 = 456$ $456 - 8 = 448$</p> <p>Mein Rechenweg Nr. 2: $746 - 298 = 448$</p> |

| Jeweils nur ein und/ oder unklare Rechenwege, Mängel bei Ergebnissen und/ oder Notation | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Verschiedene Wege zum gleichen Ziel Schreibe zwei verschiedene Rechenwege zu jeder Aufgabe auf! | Verschiedene Wege zum gleichen Ziel Schreibe zwei verschiedene Rechenwege zu jeder Aufgabe auf! |
| <p>a) $358 - 347 = 11$</p> <p>Mein Rechenweg Nr. 1: $300 - 300 = 0$ $50 - 40 = 10$ $8 - 7 = 1$</p> <p>Mein Rechenweg Nr. 2:</p> <p>b) $746 - 298 = 5$</p> <p>Mein Rechenweg Nr. 1: $700 - 200 = 500$ $40 - 10 = 50$ $6 - 8 = 2$</p> <p>Mein Rechenweg Nr. 2:</p> | <p>a) $358 - 347 =$</p> <p>Mein Rechenweg Nr. 1: $358 - 347 = 11$ $300 - 300 = 0$ $50 - 40 = 10$ $8 - 7 = 1$</p> <p>Mein Rechenweg Nr. 2: $300 - 347 = 47$ $50 - 47 = 17$ $17 - 7 = 10$</p> <p>b) $746 - 298 = 552$</p> <p>Mein Rechenweg Nr. 1: $700 - 200 = 500$ $40 - 10 = 50$ $40 - 10 = 50$ $6 - 8 = 2$</p> <p>Mein Rechenweg Nr. 2: $700 - 200 = 500$ $90 - 30 = 60$ $0 - 8 = 8$</p> |

6 Konsequenzen für den Unterricht

Bei den Auswertungen haben wir bereits mehrmals auf klassenspezifische Unterschiede hingewiesen, die den Schluss zulassen, dass die Wahl und Anzahl verschiedener Rechenwege von der jeweiligen Thematisierung im Unterricht abhängen und dementsprechend beeinflussbar sind. Selbstverständlich ist nicht davon auszugehen, dass die Betonung flexiblen Rechnens im Unterricht automatisch flexibles Rechnen aller Schüler zur Folge hat. Mathematikunterricht kann nur anregende Lernumgebungen zur Verfügung stellen – was die Schüler sich davon aktiv erschließen, kann bekanntlich nicht determiniert werden.

Andererseits ist es aber notwendig, dass sich der Unterricht nicht auf eine Hauptstrategie beschränkt, sondern mehrere zentrale Möglichkeiten behandelt, um so auch den Schülern Rechnen auf verschiedenen Wegen anzubieten, die von alleine nicht die Hauptstrategien entdecken würden. Anregungen zu verschiedenen Rechenwegen können z. B. in gemeinsamen Rechenkonferenzen zusammengetragen werden. Wichtig ist aber, dass das flexible Rechnen nicht nur leistungsstarken Schülern überlassen bleibt und unterschiedliche Rechenwege nicht nur gesammelt werden.

Alle Kinder sollten dazu angeregt werden, die Hauptstrategien an verschiedenen Aufgaben auszuprobieren, um so selbst Erfahrungen zu sammeln in Bezug auf universelle und spezielle Strategien, Fehleranfälligkeiten etc. Auf dieser Grundlage ist es dann möglich, dass die Schüler die Strategien

anwenden, die sie am sinnvollsten finden oder die ihnen zusagen. Schlussendlich ist es eine Entscheidung des einzelnen Schülers, nach welchen Kriterien er seine Rechenstrategie auswählt. Aber um überhaupt aufgabenspezifisch auswählen zu können, sind Anregungen und ein wenig Übung nötig.

7 Weiterentwicklung des Diagnosebogens

Auch wenn oder sogar gerade weil die ausgewerteten Bearbeitungen einen insgesamt wenig flexiblen Umgang mit den gestellten Aufgaben zeigen und nicht wenigen Schülerinnen und Schülern das Nachdenken über verschiedene Wege schwer fällt, bietet dieser Diagnosebogen wichtige Informationen zur Flexibilität der Kinder.

Eine leichte Veränderung der Aufgabenstellung könnte eventuell dem Einsatz von jeweils zwei ähnlichen Strategien vorbeugen: Statt „Schreibe zwei verschiedene Rechenwege zu jeder Aufgabe auf!“ ist vielleicht besser zu formulieren „Schreibe zwei ziemlich unterschiedliche Rechenwege zu jeder Aufgabe auf!“

Außerdem erscheint uns eine Erweiterung der Aufgabenstellung sinnvoll: Jeweils nach den Aufgaben a) und b) könnte eine Einschätzung gefordert werden, welcher Rechenweg sich besser eignet. Dazu sollten die Kinder dann jeweils den Satz vervollständigen „Ich finde meinen Rechenweg Nr. ___ besser, weil ...“ Hierdurch würden die Kinder dann noch einmal an den Sinn und Zweck verschiedener Rechenwege erinnert und motiviert, über die Wahl ihres Rechenweges etwas genauer nachzudenken.

Allerdings sind solche schriftlichen Äußerungen im Mathematikunterricht in besonderem Maß von der jeweiligen Unterrichtskultur abhängig. Sie geben der Lehrerin nur dann tiefere Einblicke in die Denkweisen der Kinder, wenn diese es gewöhnt sind, sich schriftlich auszudrücken und ihre Überlegungen zu formulieren.

Literatur

- Poelstra, B. (2007). *Entwicklung und Erprobung von Diagnoseaufgaben zur halbschriftlichen und schriftlichen Addition und Subtraktion im 3. Schuljahr*. Schriftliche Hausarbeit im Rahmen der Ersten Staatsprüfung. Dortmund: unveröffentlicht.
- Sundermann, B. / Selter, Ch. (2006). *Beurteilen und Fördern im Mathematikunterricht*. Berlin. CVK.
- Sundermann, B. / Selter, Ch. (2006a). Pädagogische Leistungskultur: Mathematik in den Klassen 3 und 4. In: Bartnitzky, H. u. a. (Hrsg.). *Pädagogische Leistungskultur*. Band 121. Frankfurt: Grundschulverband, Heft 4.

Aspekte der Elementarmathematik in den Sekundarstufen I und II

Gerhard Hofsäß
Pädagogische Hochschule Heidelberg

Strategienbildung an komplexen Situationen

Summary

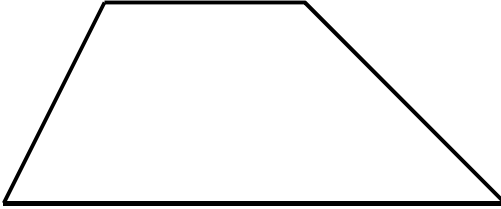
In this paper several ways will be shown to solve a mathematical problem. The task is to specify a n -gon which has half the area of a given trapezium. Several suggestions for strategies are made and feed back is given reporting which of the strategies are most popular among the pupils and which are only seldom or never used at all. In this way it should become obvious in which field of the further development of mathematics teaching it seems meaningful to enforce the efforts.

Einleitung

Die deutschen Schüler haben sich in den vergangenen Jahren beim internationalen Vergleich der Mathematikleistungen wirklich nicht mit Ruhm bekleckert. Ihr relativ schlechtes Abschneiden führte zu vielen bildungspolitischen Diskussionen über das Schulsystem, über Bildungspläne, Unterrichtsinhalte und Unterrichtsformen. Was an Reformen euphorisch begonnen wurde, fand meistens bald ein recht bescheidenes Ende. Denn Wunschrichtungen waren schon immer leicht zu formulieren. Wenn es aber dann darum geht, sie zu konkretisieren, kommt man schnell an den Punkt, an dem die Reformansätze im Sand verlaufen. Es fehlt an Beispielen, die überzeugend vor Augen führen, wie sich der Mathematikunterricht zum Besseren hin weiterentwickeln lässt. Schlagworte wie nachhaltiges Unterrichten, kreatives Üben, offener Unterricht bekommen ihr Gewicht nicht durch gebetsmühlhaftes Postulieren, sondern durch nachweisbare Lehr- und Lernerfolge. Oft ist es so – zumindest bei Lehramtsstudenten ständig zu beobachten – dass klare Zielvorstellungen darüber fehlen, wie sich der Lernstoff dem Schüler in einzelnen Unterrichtssituationen erschließen soll. Die Chancen, nachhaltig zu unterrichten, werden nicht ergriffen, weil sie gar nicht gesehen werden. Natürlich wird solche plakative Kritik den erfolgreichen Bemühungen vieler Lehrer nicht gerecht. Eine Herausforderung, Verbesserungen anzustreben, soll sie aber sein. Das Verharren bei Aufgaben im unteren Niveaubereich und Einschleifen von Routinetechniken sichert auf Dauer den Erfolg nicht. Die Lehrer müssen höheren Anspruch kundtun und den Schüler behutsam zu echter Vertiefung führen. Die Situationen werden zwangsläufig komplexer. Der folgende Beitrag zeigt an einem breit ausgefächerten Bei-

spiel, wie sich Strategischulung an komplexen Situationen vollziehen kann.

Die Schüleraufgabe



Ein Bauer vererbt ein großes Stück Land von der Form eines Trapezes an seine Tochter und seinen Sohn zu gleichen Teilen. Da die Tochter in die Fremde ziehen und ihren Anteil verkaufen will, darf der Sohn die Abgrenzung für seinen Anteil frei wählen. Er behält ein zusammenhängendes Stück Land.

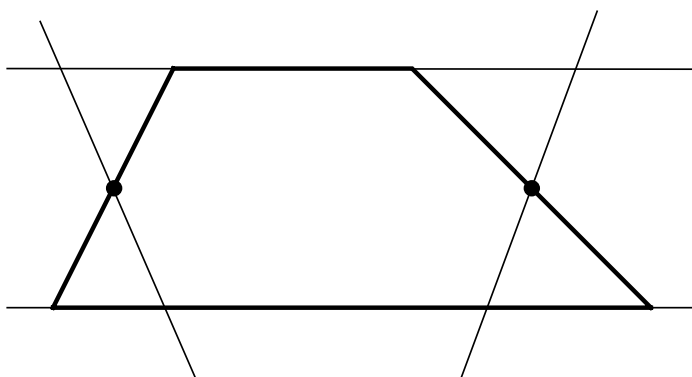
Vorbemerkungen

Manchen Leser wird ein Unbehagen befallen, weil hier wieder einmal Mathematik in eine gekünstelte Umweltsituation verpackt wird. Ich bin sonst auch ein Gegner solcher Aufgaben. Aber diesmal liegt der Fall anders. Es wird sich zeigen, dass bei dieser Aufgabe der Umweltbezug gerade dann Motivationshilfe sein wird, wenn der fachliche Anspruch gesteigert wird.

Es sei die Form des Trapezes fest vorgegeben. Nur mit ihr sollen sich die Schüler zunächst befassen. Auf Variation der Form wird am Schluss des Artikels kurz eingegangen.

Die Aufgabe verlangt in Abkehr üblicher Forderungen die Dokumentation geometrischer Überlegungen. Der Schüler ist gewohnt, vorgegebene Maße in die gelernte Flächeninhaltsformel einzusetzen. Die Anwendung dieser Routine ist ihm bei dieser Aufgabe verwehrt. Maße sind nicht explizit vorgegeben. Natürlich könnte der Schüler die Figur abmessen, den Flächeninhalt errechnen und in der Zeichnung geeignete Umrisse festlegen. Man wird dies nicht verbieten, aber doch vorwiegend Lösungen aufgrund geometrischer Überlegungen wünschen.

Als Grundroutine kann man voraussetzen, dass der Schüler zu einem Trapez ein flächeninhaltsgleiches Rechteck angeben kann. Es ist schon nicht Allgemeingut, durch flexible Gedankenführung zum Trapez andere flächeninhaltsgleiche Trapeze und Parallelogramme, sogar Dreiecke anzugeben. Dieses Wissen lässt sich erwerben durch Verwendung von Arbeitsmitteln, bei denen flächeninhaltserhaltende Veränderungen durch Verstellen von Drehzeigern vorgenommen werden.



Über dieses Vorwissen verfügten die von uns beobachteten Schüler. Für erste Lösungsversuche ist es eine Hilfe, wenn das gegebene Trapez auf Gitterpunktpapier gezeichnet ist. Ziel ist es aber, dass der Schüler schließlich möglichst viele Ideen ohne diese Hilfe entwickelt. Es ist nun interessant, wie die Schüler die gestellte Aufgabe angehen, wo Blockaden zu beobachten sind und welche Lösungsstrategien auch nicht ansatzweise vorgeschlagen werden. Wenn man sich darüber Klarheit verschafft, erhält man Hinweise, welche Gedankenführungen mehr geübt werden müssten, worin also Förderung bestehen sollte. Wenn der Mathematikunterricht nach so erkannten Zielen ausgerichtet wird, darf man zu Recht von einer Weiterentwicklung reden.

Strategie I

Das Trapez in eine Figur verwandeln, die man leicht halbieren kann (Nr. 1-8)

Schüler, die wissen, wie man ein Trapez in ein flächeninhaltsgleiches Rechteck oder Parallelogramm verwandelt, sehen diesen klaren Lösungsweg. Die Umweltsituation wirkt insofern belebend, als man nicht den Fehler machen darf, als zu vererbende Fläche Land zu markieren, das dem Bauer gar nicht gehört.

Die Schüler brachten bei unseren Beobachtungen nicht die Fülle der unten angegebenen Lösungen Nr. 1–8. Sie sind es offenbar nicht gewohnt, eine Idee konsequent durchzuvariiieren. Schon hier muss man Impulse geben. Sehr realistisch ist, dass man nach dem harmlosen Fall 1 den Fall 2 gemeinsam erarbeitet, notfalls auch noch die Fälle 3 und 4, dann aber in Eigenarbeit die Analogisierung auf die Fälle 5–7 verlangt. Denn was man mit dem rechten Drehzeiger gemacht hat, kann man mit dem linken auch machen. An der Konsequenz, so etwas zu verlangen, durchaus mit einer gewissen Unerbittlichkeit, mangelt es heutzutage sehr.

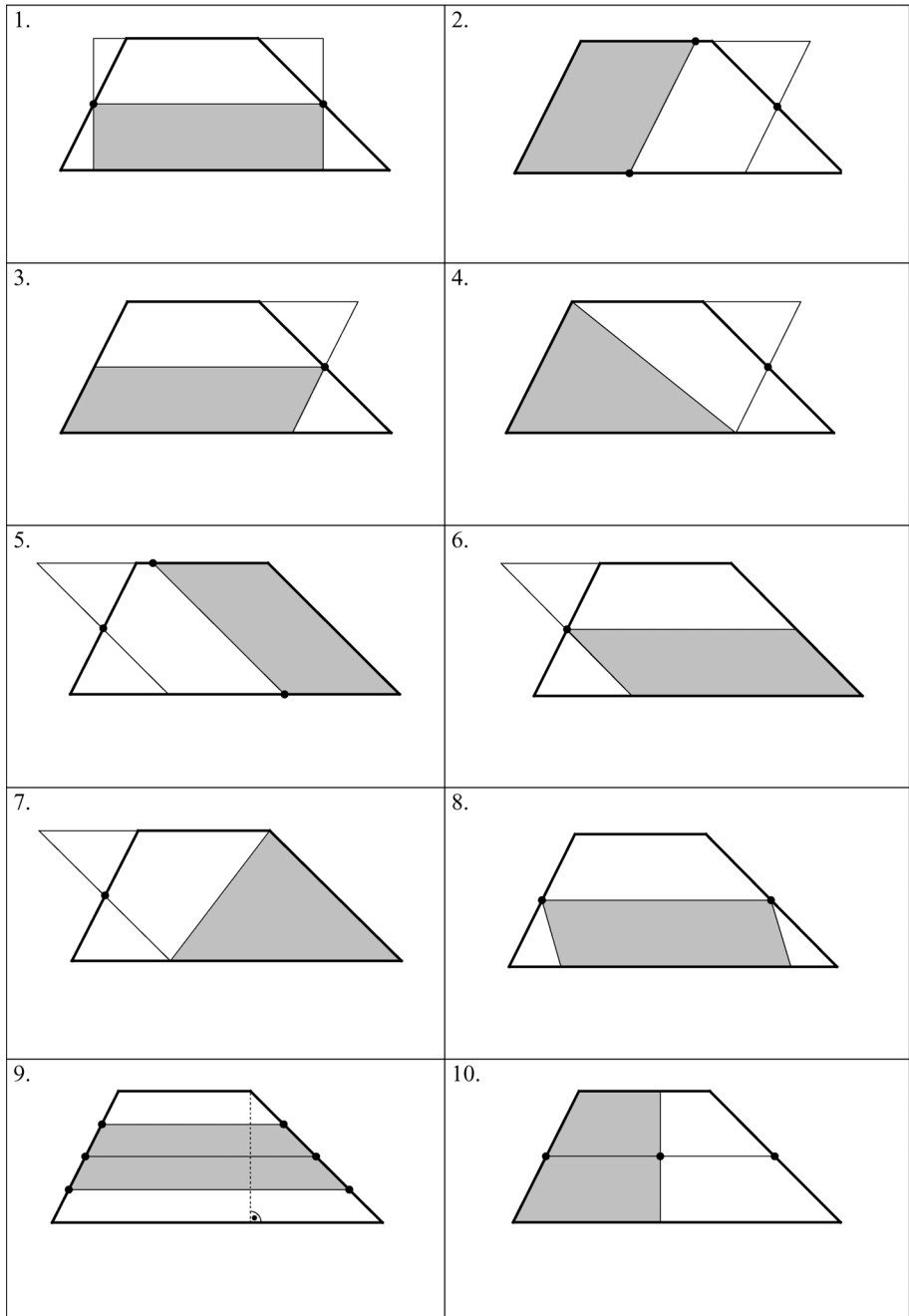


Abb. 1-10

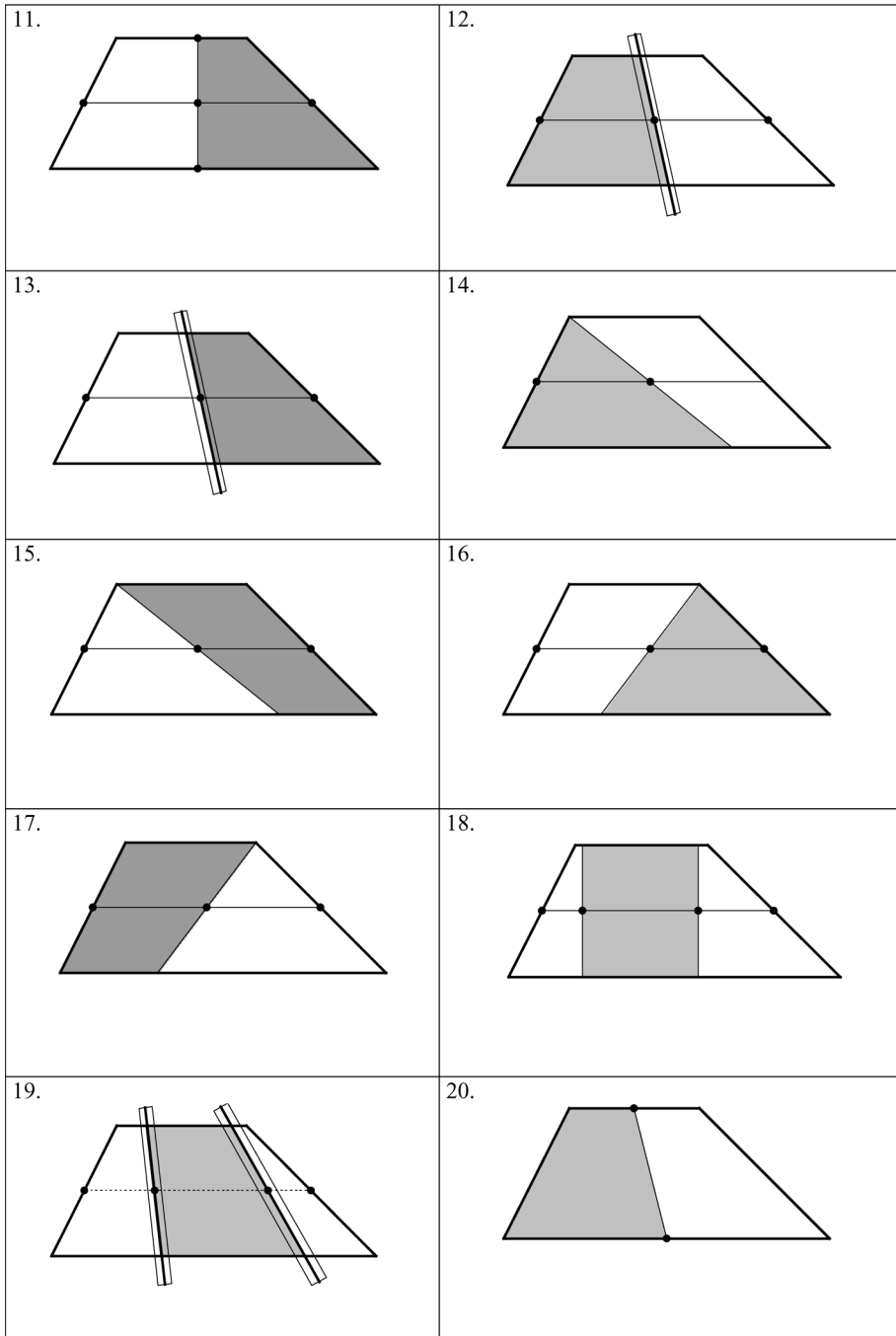


Abb. 11-20

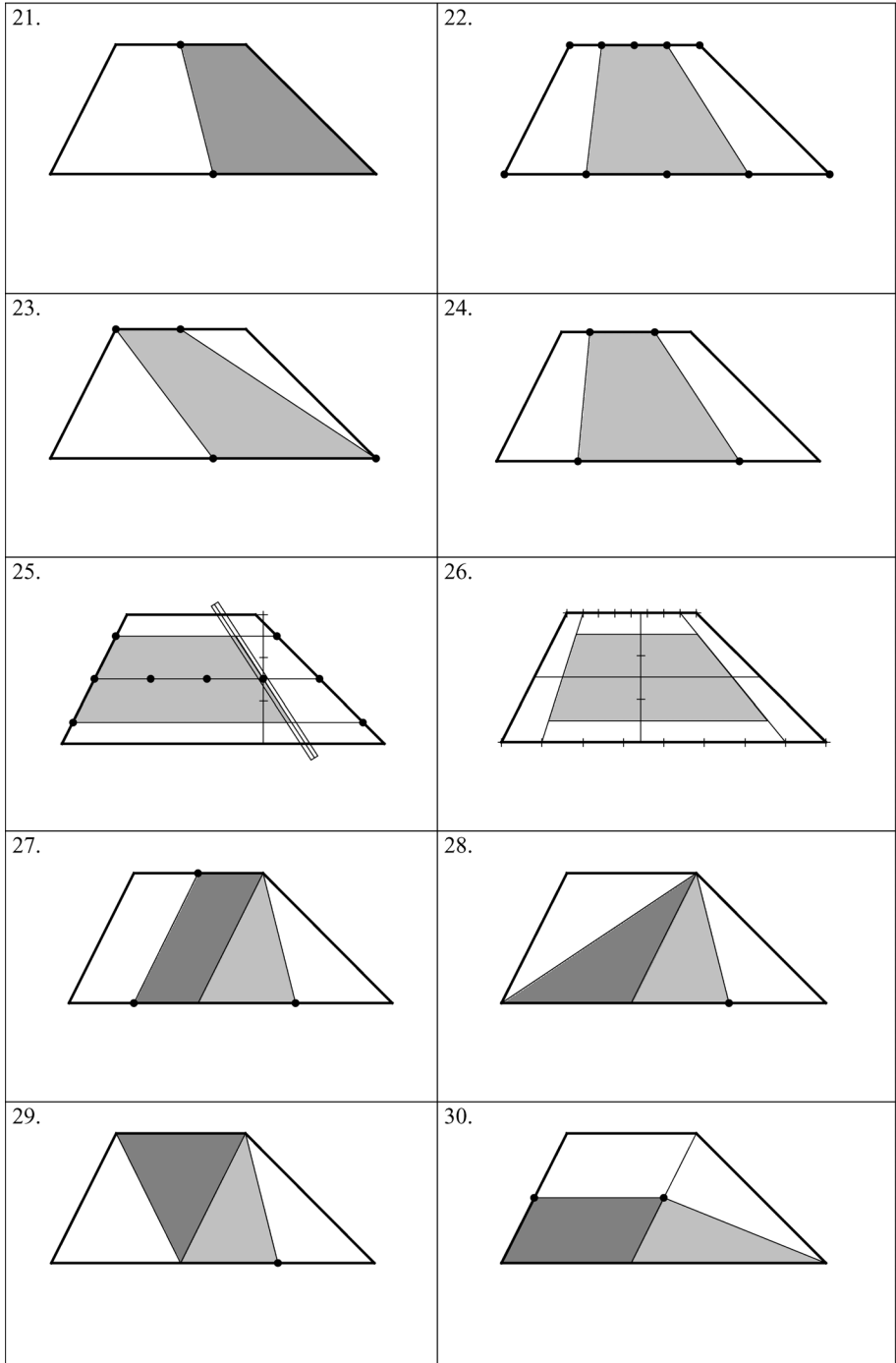


Abb. 21-30

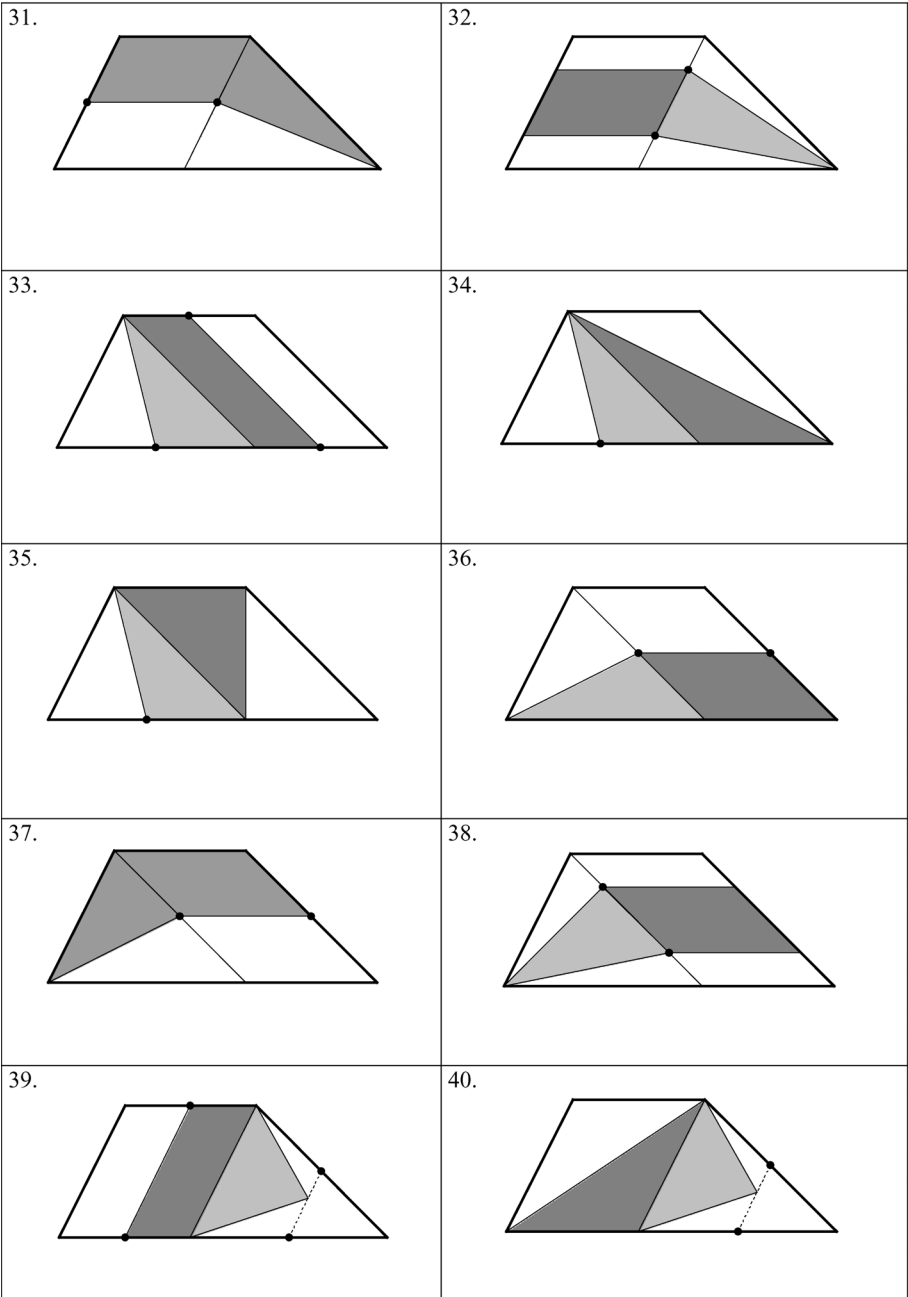


Abb. 31-40

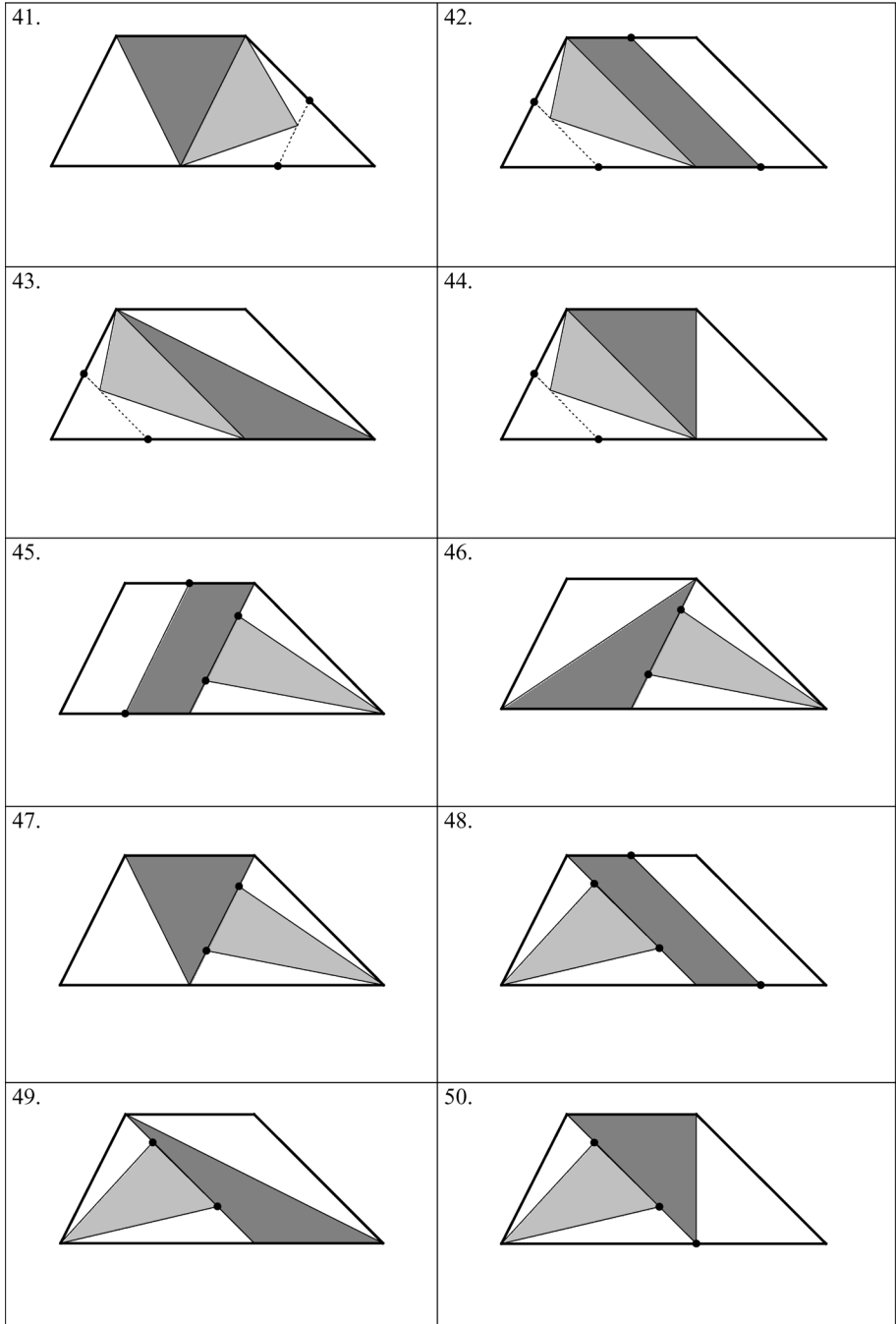


Abb. 41-50

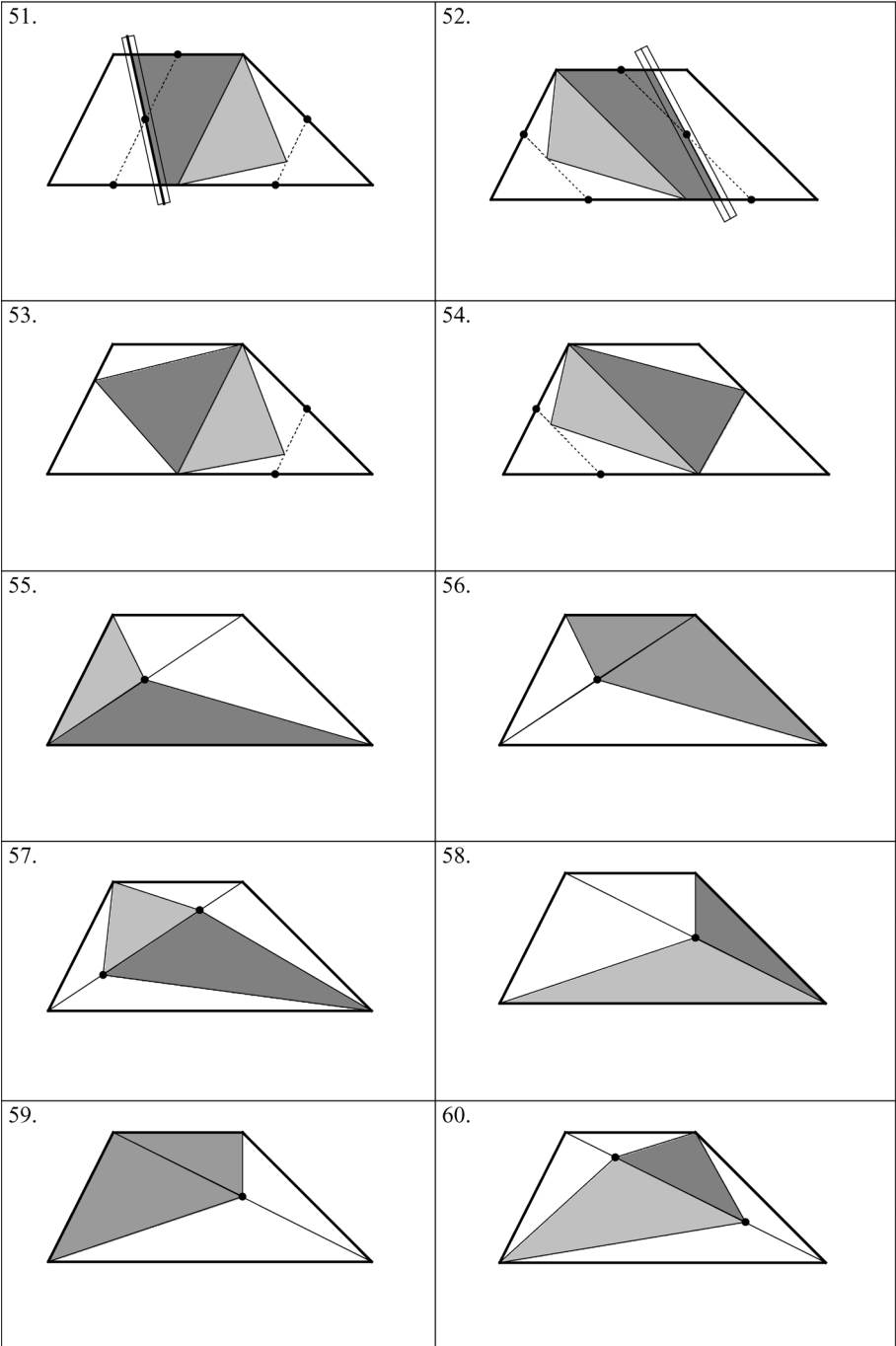


Abb. 51-60

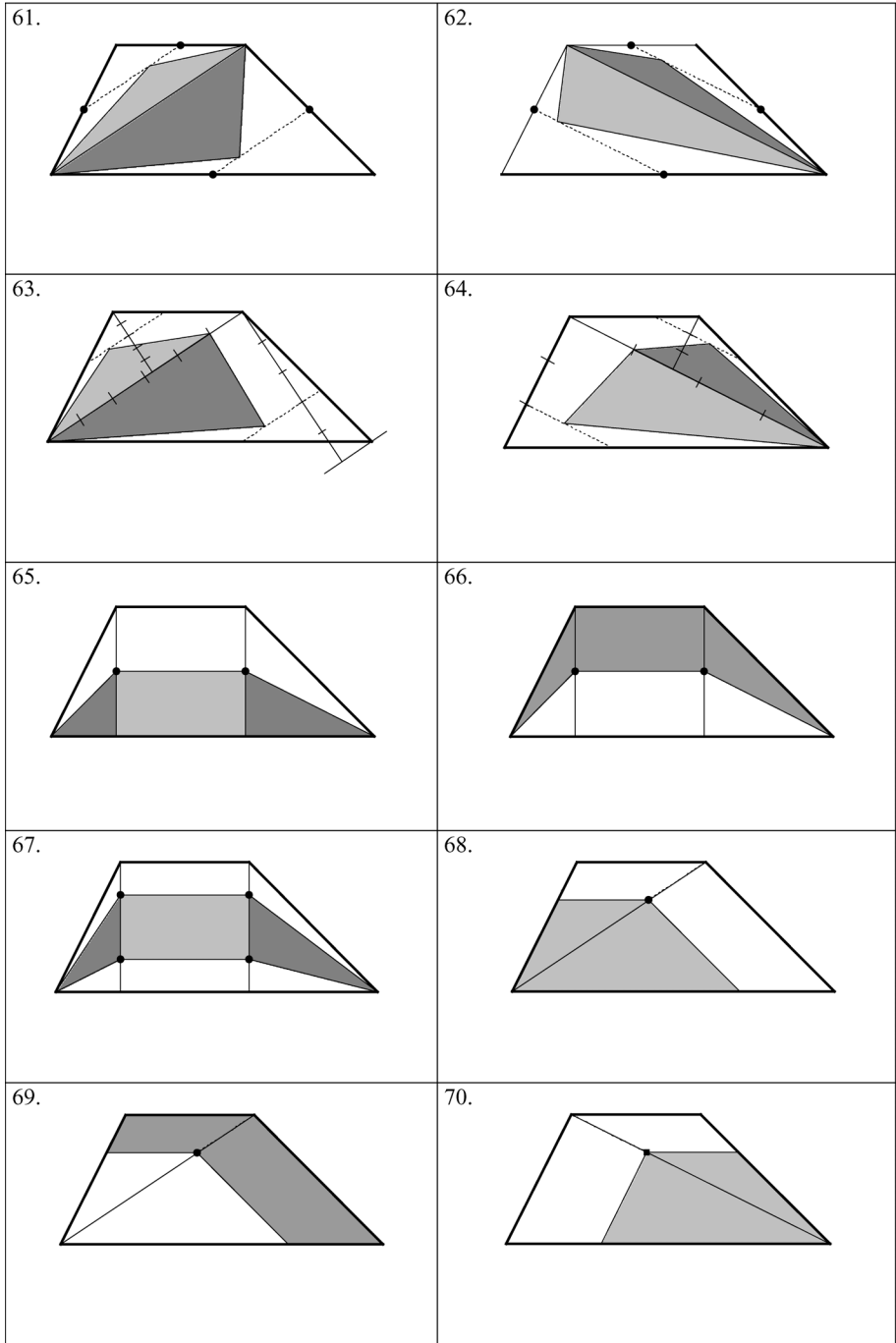
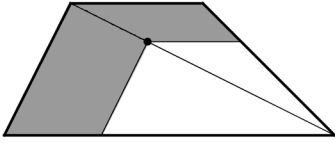
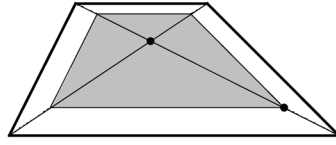


Abb. 61-70

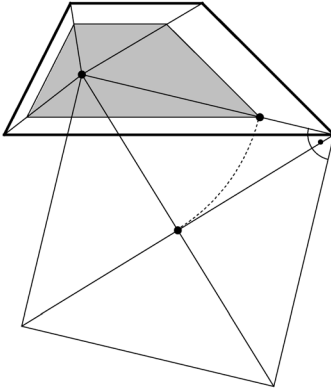
71.



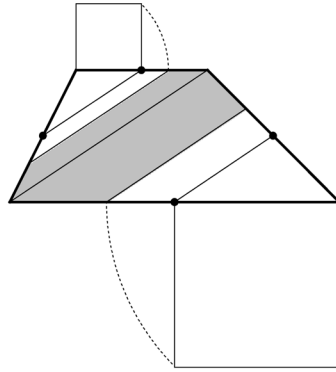
72.



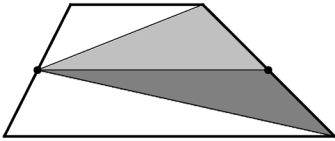
73.



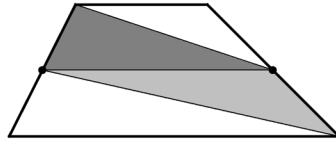
74.



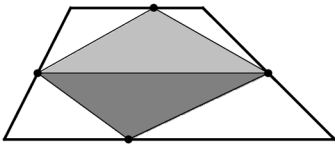
75.



76.



77.



78.

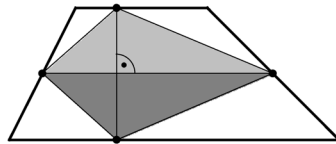


Abb. 71-78

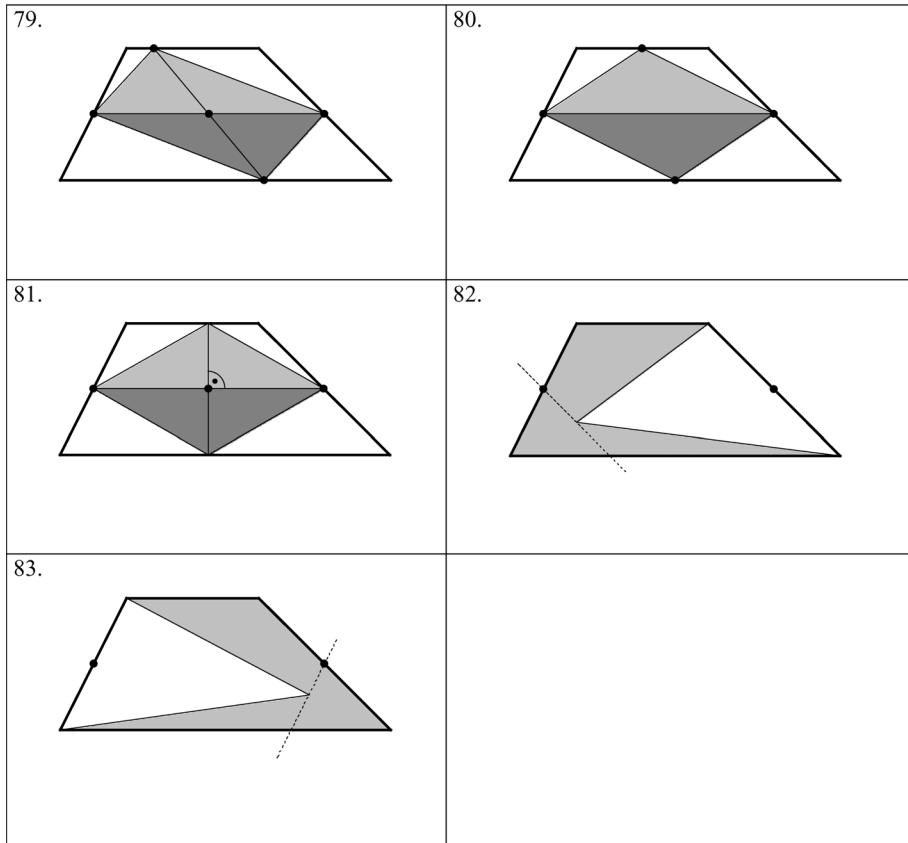


Abb. 79-83

Die Anforderungen werden gesteigert mit Lösung Nr. 8, wobei sich an die Strategie 1 eine Weiterführung durch die Scherung anschließt. Die Schüler sind es gewohnt, ein Parallelogramm in ein Rechteck, kaum jedoch ein Rechteck in ein Parallelogramm zu verwandeln. Dabei müsste doch der Vergleich von Nr. 3 und Nr. 6 zu dynamischer Sicht Anlass geben. Motivationsanreiz könnte sein: Keine der vier Ecken des alten Grundstücks soll dem verbleibenden Gelände angehören. Mit Nr. 8 soll angedeutet werden, dass es viele Parallelogramme gibt. Entsprechend könnte die Idee der Scherung angewandt werden auf die Dreiecke in Nr. 4 und Nr. 7. Es sind also in der vielleicht als überlang empfundenen Liste von Lösungen gar nicht alle Ideen ausgestaltet. Dies regt dazu an weitere Lösungsfiguren zu zeichnen.

Strategie II

Formelwissen einsetzen

Dominant ist bei vielen Schülern das Formelwissen:

$$A(\text{Trapez}) = m \cdot h = \frac{a+c}{2} \cdot h.$$

Hieraus lassen sich mehrere Strategien ableiten.

Strategie IIa

Die Mittellinie beibehalten, die Höhe halbieren (Nr. 9; 1, 3, 6, 8)

Die meisten Schüler finden diese Strategie. Zumindest sehen sie ein, dass diese Gedankenführung einfach ist. Die geometrische Realisierung fällt aber fast allen sehr schwer. Wenn die Zielfigur ein Trapez mit derselben lokalisierten Mittellinie sein soll, muss man von der Mittellinie aus jeweils die halbe Höhe halbieren, siehe Nr. 9.

Es muss aber gar nicht sein, dass die Mittellinie in ihrer Lokalisierung beibehalten wird. Dies gibt Anlass, die Fälle 1, 3, 6 und 8 unter diesem Aspekt zu durchdenken. Das sind Anregungen zumindest für Nachbesprechungen. Der Schüler muss zum Ausdruck bringen, dass Rechtecke und Parallelogramme Trapeze sind, bei denen die Grundseite gleich lang wie die Mittellinie ist.

Strategie IIb

Die Mittellinie halbieren, die Höhe beibehalten (Nr. 10-19)

Die Lösungen Nr. 10 und 11 entsprechen dem Grundniveau, das jeder Schüler beherrschen muss. Steigerung kommt mit der Variationsfähigkeit, die mit dem Drehzeiger dokumentiert ist (Nr. 12 und 13), der sogar in spezielle Lage gebracht werden kann (Nr. 14-17). Man wird sich damit nicht begnügen, sondern fragen, ob die halbe Mittellinie linksbündig oder rechtsbündig angesiedelt sein muss. Man kann an der Tafel oder am Tageslichtprojektor einen Schiebebalken mit der Länge der halben Mittellinie verwenden und ihn auf der Mittellinie an beliebiger Stelle lokalisieren. Wenn man Glück hat, was von der Form des Trapezes abhängt, erhält man dabei auch Rechtecke (Nr. 18). Volle Flexibilität ist erreicht, wenn am Schiebebalken noch Drehzeiger befestigt sind (Nr. 19). Innerhalb gewisser Grenzen lassen die sich bewegen. Sie könnten sogar spezielle Figuren bilden, z.B. Dreiecke oder Parallelogramme – wiederum ein Anreiz weitere Lösungsfiguren zu entwerfen.

Strategie IIc**Die Höhe beibehalten, die Grundseiten a und c halbieren (Nr. 20-24)**

Der Schüler kennt die formale Beziehung $m = \frac{a+c}{2}$. Anstatt m zu halbieren, halbiert er jede der Grundseiten a und c. Dass dies eine andere Handlung, jedoch mit derselben Wirkung ist, ist zunächst bei den meisten Schülern nicht volle Überzeugung, eher etwas zum Staunen. Die Lösungen Nr. 20 und 21 entsprechen dem Grundniveau. Kein Schüler brachte von sich aus die Idee, die Lokalisierung von $\frac{a}{2}$ und $\frac{c}{2}$ der Variation zu unterwerfen. Ob von der Seitenmitte aus gemacht (Nr. 22), oder linksbündig mit rechtsbündig kombiniert (Nr. 23), oder jeweils an beliebiger Stelle lokalisiert (Nr. 24): Solche Flexibilität scheint den Schülern fremd zu sein. Die Denkanstöße müssen hier wohl vom Lehrer kommen.

Strategie IId**Sowohl die Mittellinie als auch die Höhe verändern (Nr. 25-26)**

Wir erlebten bei den Schülern die totale Blockade beim Auftrag, sowohl die Mittellinie als auch die Höhe zu verändern. Kompositionsfähigkeit wurde also verlangt. Jetzt ist nicht nur die Situation komplex, auch die Strategie nimmt an Komplexität zu. Warum versagen unsere Schüler an solchen Aufgaben? Warum sind selbst unsere Studenten in breiter Front ziemlich hilflos? Offenbar sind ihnen solche Gedanken fremd, wurden nicht geübt, wurden nicht verlangt. Dabei müsste es doch zumutbar sein, $\frac{1}{2}$ als $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$ (Nr. 25) oder als $\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{8}$ (Nr. 26) zu beschreiben und entsprechend passend in der Zeichnung zu realisieren. Es passt gerade dieses Beispiel ideal zur Leitidee Modellieren des neuen Bildungsplanes in Baden-Württemberg. Wie schön lässt sich dieser Sachverhalt mathematisieren: Zu einem Bruch $\frac{a}{b}$ heißt der geeignete Partner $\frac{b}{2a}$. Dabei muss man nur wiederum aufpassen, dass man der Sachsituation gerecht wird und nicht fremdes Land vererbt. Also muss man dabei zwingend die Nebenbedingung $a < b < 2a$ einhalten.

Strategie III

Das Trapez in Teilfiguren zerlegen, die Fläche jeder Teilfigur halbieren

Hierzu gibt es so viele Möglichkeiten, dass es sinnvoll ist, weiter zu unterteilen.

Strategie IIIa

Parallelogramm und Dreieck (Nr. 27-54)

Parallelogramm und Dreieck lassen sich auf vielfältige Weise halbieren. Die Kombination beider Vorgänge mag in den meisten Fällen simpel erscheinen, sie ist jedoch ein sehr geeignetes Feld für integrierendes Üben. Zum Halbieren nützt man beim Parallelogramm die zentrische Symmetrie (Nr. 27-50), beim Dreieck bietet sich der einfache Weg über Halbierung der Grundseite oder der Höhe an.

Echte Vertiefung wird erreicht, wenn die zentrische Symmetrie des Parallelogramms grundsätzlich dokumentiert wird durch einen sich um seinen Mittelpunkt drehenden Zeiger (Nr. 51 und 52). Jede Stellung ist erlaubt.

Wenn die Halbierung des Parallelogramms auf ein Dreieck führt, wie in Nr. 41, kann man dieses noch scheren und kommt zu Lösungen der Art von Nr. 53, analog Nr. 54. Es ist reizvoll, Strategischulung auch so zu betreiben, dass dem Schüler eine Zeichnung wie Nr. 53 zur Entscheidung vorgelegt wird, ob Flächenhalbierung vorliegt oder nicht. Wenn ihm dies schwer fällt, kann man ihm Nr. 41 als Hilfe anbieten.

Strategie IIIb

Zwei Dreiecke (Nr. 55-64)

Der Schüler zerlegt das Trapez durch eine Diagonale in zwei Dreiecke und kann die Grundroutinen der Dreieckshalbierung zur Anwendung bringen (Nr. 55-62). Er halbiert wohl die Grundseite oder die Höhe, auf höherem Niveau mit Flexibilität in der Lokalisierung wie etwa in Nr. 57, wofür ein Schiebebalken wieder gute Dienste leistet. Die höchste Forderung und damit auch Ziel künftiger Förderung wäre wieder die Komposition, also Veränderung

sowohl der Höhe als auch der Grundseite, z.B. $\frac{1}{2} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6}$ in Nr. 63.

Allein so eine vorgelegte Zeichnung zu interpretieren, erfordert ein hohes Maß an Detektivarbeit. Hoffentlich sieht der Lehrer, dass diese Aufgabe eine ganz andere Qualität hat als die Routineaufgabe „Setze gegebene Größen in die Dreiecksformel ein“.

Strategie IIIc **Drei Teilfiguren (Nr. 65-67)**

Die Steigerung der Anzahl der Teilfiguren bringt nicht zwangsläufig eine Steigerung der Schwierigkeiten. Wenn Teilfiguren gewählt werden können, deren Flächeninhaltshalbierung leicht fällt wie in Nr. 65 (komplementär Nr. 66), sind wir wieder beim elementaren Üben. Wenn überhaupt die Schüler mehrere Lösungsstrategien angeben, ist fast immer Nr. 65 bei den Lösungen zu finden. Bei näherem Nachfragen entpuppt sich allerdings diese Lösung häufig als Probierlösung mit lückenhafter Begründung. Vom leicht halbierbaren Teilrechteck bzw. der halben Höhe geht eine gewisse Verlockung aus. Die Schüler zeichnen diese Trennlinie im Rechteck ein und verbinden sie mit den Eckpunkten. Um den Rest kümmern sie sich nicht genau, d.h. kaum ein Schüler weist streng nach, dass die beiden Dreiecksflächen auch halbiert sind. Mangelndes Argumentationsbedürfnis!

Strategie IV **Die zentrische Streckung anwenden (Nr. 68-74)**

Ganz neue Aspekte bringt die Verwendung der zentrischen Streckung beim Gewinnen von Lösungen. Dabei sind interessante Beobachtungen zu machen. Kein Schüler hat von sich aus einen solchen Lösungsweg vorgeschlagen. Man musste schon ködern mit dem Wunsch, das verbleibende Grundstück soll wieder Trapezform haben, entweder nur so verbal geäußert oder zeichnerisch als Grobziel vorgegeben oder indirekt genannt mit dem Wunsch nach einer Figur mit parallelen Seiten zur Ausgangsfigur. Sodann meinen die Schüler, das Streckzentrum müsse an einer bestimmten Stelle liegen. Diesen Platz gelte es zu finden. Kein Schüler sagt mit einer gewissen Souveränität, dass jeder Punkt des Trapezinneren als Streckzentrum in Frage kommt. Mit Nr. 73 ist dies eingefangen, nach Vorarbeit durch Nr. 68-72. Ein großes Problem stellt die Festlegung des Streckfaktors dar. Die meisten Schüler brauchen hier Hilfe. Der Zusammenhang Längenverhältnis $1:k$ bewirkt Flächeninhaltsverhältnis $1:k^2$ müsste bei guter Behandlung der zentrischen Streckung im Unterricht angefallen sein, scheint aber bei vielen Schülern nicht strategisch verfügbar zu sein. Selbst manch einer der weiß, dass der Streck-

faktor $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$ beträgt, kann dieses Wissen nicht geometrisch umsetzen. In Nr.

73 ist die Konstruktion ausgeführt. Vom beliebig gewählten Zentrum ist ein Eckpunkt der Streckung unterworfen. Die Strecke, die verkürzt werden soll, ist als Quadratseite gedeutet. Die Bildstrecke muss die Länge der halben Quadratdiagonalen haben. Jeder Schüler lernt isoliert beim Quadrat etwas über die Länge der Seite, der Diagonalen und der halben Diagonalen. Er wird jedoch selten aufgefordert, dieses Wissen anzuwenden. Wenn nun diese Konstruktion mit den Schülern erarbeitet ist, meinen viele Schüler, sie

müssten sie viermal anwenden. Alternativ genügt einmalige Anwendung. Den Rest darf man durch Zeichnen von Parallelen erledigen – ein schönes Beispiel für strategisches Vorgehen.

Um die Motivation aufrecht zu erhalten, bedarf es immer wieder neuer Impulse. Da können Zielvorgaben helfen, die mit der ursprünglichen Textformulierung der Aufgabe leicht zu verdeutlichen sind. Man kann die Seiten des gegebenen Trapezes als Straßen deuten und verlangen, dass das bei der Erbschaft verbleibende Grundstück an jeder Straße eine Einfahrt haben soll. Von jeder Trapezseite muss also eine Teilstrecke erhalten bleiben. Das verbleibende Gelände hat dann bestimmt nicht Vierecksform. Der Schüler muss sich in ungewohntes Terrain vortasten. In Problemsituationen hilft oft die Strategie „Probieren und gezielt Korrigieren“. Wie in Nr. 74 ausgeführt ist, kann man das gegebene Trapez über eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegen. Jedes dieser Dreiecke gilt es so zu halbieren, dass von jeder Trapezseite eine Teilstrecke erhalten bleibt. Um Fuß zu fassen kann man zunächst die Mitten der Trapezseiten wählen. Die Verbindung dieser Punkte gibt ein im Sinne der Aufgabe viel zu großes Grundstück. Die Fläche des abgetrennten kleinen Dreiecks beträgt nur ein Viertel der Dreiecksfläche. Die Aufgabe wäre gelöst, wenn das abgetrennte Stück die Hälfte der Dreiecksfläche ausmachen würde. Dieses Ziel ist durch zentrische Streckung mit Faktor $\sqrt{2}$ zu erreichen. Die Ausführung bedient sich des Zusammenhangs zwischen Grundseite und Diagonale im Quadrat. Beim anderen Teildreieck verfährt man entsprechend.

Strategie V

Die Mittellinie beibehalten, von ihr aus nach oben und unten ein Dreieck abgrenzen (Nr. 75-81)

Eine dynamische Problemstellung führte uns auf eine Serie von Lösungen, bei denen die Mittellinie des Trapezes eine besondere Rolle spielt. Wir verbanden die beiden rechts liegenden Ecken des Trapezes mit einem Punkt der Mittellinie zu einem Dreieck und fragten, wie weit dieser Punkt auf der Mittellinie nach links rutschen muss bis das Dreieck halb so groß ist wie das Trapez. Die Antwort ist in Nr. 75 wiedergegeben: Bis zum Schnitt mit der linken Trapezseite. Die Mittellinie unterteilt dieses Dreieck selbst in zwei

Dreiecke, jedes hat den Flächeninhalt $m \cdot \frac{h}{4}$. Mit dieser Erkenntnis,

verbunden mit der Möglichkeit, diese beiden Dreiecke zu scheren, eröffnet sich die phantastische Möglichkeit, das ganze Wissen über das Haus der Vierecke zu wiederholen und strategisch zum Gewinnen von Lösungen einzusetzen. Es können als Lösungsfiguren Vierecke entstehen, die keine besonderen weiteren Eigenschaften aufweisen (belegt durch Nr. 76 und 77); durch bewusst senkrecht aufeinander gestellte Diagonalen entstehen Drachen (Nr. 78), durch bewusst erzeugte zentrische Symmetrie Parallelogramme

(Nr. 79), darunter auch das Mittenviereck (Nr. 80). Durch Überlagerung der Ideen, die zu Parallelogramm und Drachen führen, entsteht eine Raute (Nr. 81). Man hat jedoch keine Chance, auf diese Weise ein Rechteck entstehen zu lassen, wenn nicht der Thaleskreis über der Mittellinie die Strecken a und c in zentrisch symmetrisch zum Mittelpunkt liegenden Punkten schneidet. Allein diese Serie Nr. 75-81 ist eine Fundgrube für Strategiens Schulung und Argumentationsschulung.

Variation an schon erhaltenen Lösungen (Nr. 82-83)

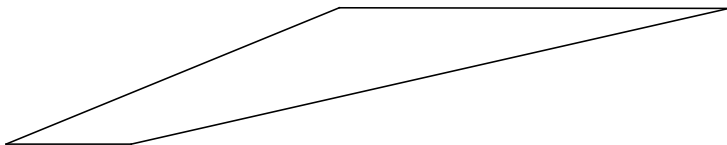
Bei einigen der bislang erhaltenen Lösungen könnte man noch das gewonnene Gebiet komplett innerhalb gewisser Grenzen verschieben oder drehen, etwa bei Nr. 8, 32, 39, 57. Der Schüler könnte jedoch nur durch Probieren die Lage variieren. Es stehen keine strategischen Überlegungen im Hintergrund. Diese Idee wird daher nicht weiter verfolgt. Eine nette Gedankenspielerlei führte uns jedoch auf noch weitere Möglichkeiten, bei denen Variation echt eine Rolle spielt. Wir wollten eine Lösung haben, bei der jede der alten Trapezecken einbezogen ist. Als Aufgabenstellung für Schüler kann man das folgendermaßen einkleiden: Man denke sich das alte Grundstück eingezäunt. Jeder der vier Eckpfosten soll auch als Eckpfosten im verbleibenden Grundstück Verwendung finden. Eine echte Problemaufgabe! Wenn man die bisher gewonnenen Lösungen durchforstet, findet man, dass die Ergänzungsfläche zu Nr. 75 dieser Forderung genügt. Sie hat aber den Schönheitsfehler, dass die beiden Teildreiecke nur einen gemeinsamen Punkt haben. Der Bauer könnte also mit seinem Traktor nicht vom einen Feld ins andere fahren. Kann man die Figur so abändern, dass ein zusammenhängendes Stück Land resultiert? Wieder zeigt es sich, dass die Verdeutlichung durch die Sachsituation Motivationshilfe ist. Durch Scherung lässt sich die gewünschte Öffnung dann leicht herstellen (Nr. 82, analog Nr. 83).

Weitere Vertiefung

Im Umfeld dieser Aufgabe kann weiteres Interesse an Mathematik geweckt werden:

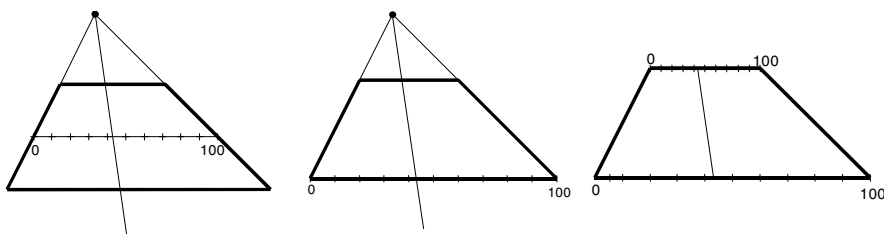
- Das Mittenviereck jedes Trapezes (allgemein jedes Vierecks) ist ein Parallelogramm mit halb so großem Flächeninhalt.
- Zwei Vierecke, die in den vier Winkeln übereinstimmen, sind nicht zwangsläufig ähnlich (vgl. Nr. 9 und 68), selbst wenn sie gleichen Flächeninhalt haben. Bei Dreiecken ist das anders. Wenn sie in den Winkeln übereinstimmen, sind sie ähnlich, und wenn sie dabei gleichen Flächeninhalt haben, sind sie kongruent.

- Alle Lösungsansätze wurden bezogen auf ein in seiner Form festvorgegebenes Trapez. Man könnte durchforsten, welche Strategien nicht greifen, wenn die Form wesentlich geändert wird.



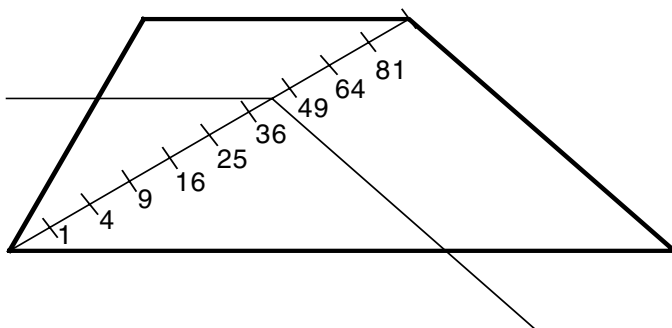
Beispielsweise kann man schon die Strategie des Beispiels Nr. 1 im Fall des obenstehend gezeichneten Trapezes nicht anwenden. Man kann zwar auch dieses Trapez in ein Rechteck verwandeln. Die Sachsituation läßt es aber nicht zu, fremdes Land zu vererben.

- Sehr zu empfehlen für den Mathematikunterricht in den Klassen 9 und 10 ist der Variationsauftrag: Anstatt 50% werden $p\%$ des Grundstücks an den Sohn vererbt. „Stelle ein Modell her, bei dem jeder beliebig gewählte Flächenanteil zwischen 0 und 100 Prozent realisiert werden kann.“ Mit äquidistanten Skalen ist dies zu bewerkstelligen.

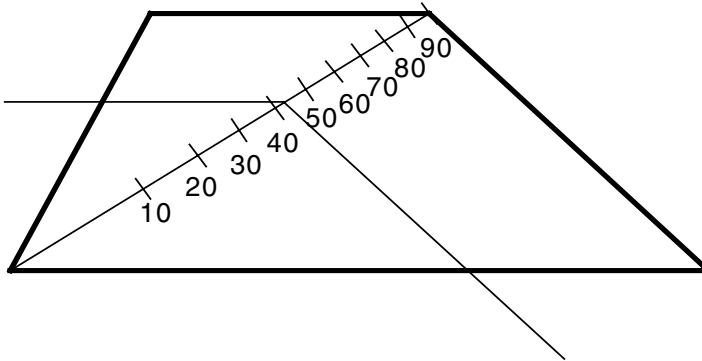


Schon allein die Beantwortung der Frage, wo diese Skalen angebracht werden können, warum in den hier vorgestellten Beispielen dieselbe Wirkung erzielt wird, verlangt Einsicht und dementsprechend strategische Planung.

Man kann bei dieser Problemstellung auch ein Modell erfinden, das von der zentrischen Streckung des gegebenen Trapezes Gebrauch macht, indem ein Winkelhaken entlang einer Diagonalen verschoben wird. Die Skalierung kann zu äquidistanten Punkten erfolgen. Zu der in Zehntelschritten gegliederten Diagonalen gehören die Prozentsätze 1, 4, 9, ..., 100.



Wer hier beispielsweise einen Flächenanteil von 43% einstellen will, hat etwas Mühe beim Interpolieren. Also wird man gerne umstellen wollen auf eine Skala, bei der die Prozentsätze in Zehnerschritten laufen: 10, 20, ..., 100. Jetzt muss man eine nichtäquidistante Punktreihe anlegen – ein anspruchsvolles Übungsfeld für die Behandlung der quadratischen Funktion gekoppelt mit ökonomischem Einsatz des Taschenrechners oder des Computers.



Zusammenfassung und Schlussbemerkungen

Die Flut der Beispiele zeigt, dass es viele strategische Ansätze zum Lösen der gestellten Aufgabe gibt. Dynamisch einsetzbare Arbeitsmittel wie Schiebepalken und Drehzeiger tragen wesentlich zum Verständnis bei. Der Lehrer wird Strategischschulung in verschiedenen Ausprägungen betreiben: Der Schüler soll Strategien entwickeln, anwenden, übertragen, auswählen, verwerfen. Die Motivation wird aufrecht erhalten durch Variation in den Aufträgen: Man kann bestimmte Zielfiguren verlangen, z.B. Drachen oder Parallelogramm, man kann einengende Rahmenbedingungen vorgeben, z.B. es sollen alle vier Ecken oder anteilig alle vier Seiten Verwendung finden, und man kann sachorientierte Ziele setzen wie zum Beispiel Ermöglichung von Ausfahrten oder Durchfahrten bei bestimmten Teilbereichen des verbleibenden Gebiets.

Die Aufgabe erlaubt sowohl routinemäßiges als auch produktives Üben. Die unterrichtliche Gestaltung kann mit einfacher Gedankenführung beginnen, kann aber dann in sehr anspruchsvolle Vertiefung führen. Ein Unterricht, in welchem bei dieser Aufgabe nur ein paar wenige Lösungen abgerufen und unverbunden aneinandergereiht werden, verschenkt viel an möglicher Förderung. Angesichts der erlebten Blockade bei gewünschten Lösungsansätzen (z.B. Nr. 25) oder der erlebten Hilflosigkeit bei der Bewältigung echter Problemsituationen (z.B. Nr. 74) habe ich kein Verständnis dafür, dass in Reformansätzen gefordert wird, Schüler sollen sich im Mathematikunterricht ihre Ziele selbst definieren. Wir müssen aufpassen, dass der Unterricht nicht anspruchslos wird und nach unten hin reformiert wird. Wir

haben nicht erlebt, dass sich Schüler, in Kleingruppen aufgeteilt, selbständig von sich aus hohe Ziele setzen. Der Lehrer muss sich seiner Verantwortung bewusst sein und deutlich führen. Er muss Neugier wecken. Er muss den Impuls dazu geben, Ideen zu variieren, zu übertragen, zu überlagern, Grenzen auszuloten, Veränderungen vorzunehmen bis ein gewünschter Effekt eintritt, Vergleiche anzustellen um vielleicht daraus neue Ideen zu gewinnen, usw. Wir brauchen Lehrer, die über solche Fähigkeiten verfügen, und wir brauchen Hochschulen, bei denen die Vermittlung solcher Fähigkeiten im Zentrum der Ausbildung steht! Die natürlichen Ziele einer echten Reform des Mathematikunterrichts müssten eigentlich erkannt sein, ohne dass wir Delegationen von Bildungsexperten auf Erkundungsreise nach Finnland oder Japan schicken.

Anmerkung

Mein Dank gilt Herrn Realschullehrer Peter Roth, Sinzig, für die Anfertigung der Computerzeichnungen.

Bernd Hafenbrak
Pädagogische Hochschule Weingarten

Auswirkungen des Taschenrechners auf das Zahlgefühl von Schülerinnen und Schülern

Summary

By using the calculator students get a rather digital imagination of numbers. To support analogous imagination, you should lay stress on geometrical presentations and mental arithmetic.

Die Misere des Kopfrechnens

Wer in den letzten Jahren vor einer Schulklasse gestanden hat oder aus der hintersten Reihe das Geschehen verfolgen konnte, dem kann nicht entgangen sein, dass die Fertigkeit des Kopfrechnens in den letzten Jahrzehnten dramatisch abgenommen hat. Der Grund für diese Misere ist offensichtlich: Auch bei der leichtesten Aufgabe erfolgt bei den meisten Schülern sofort der Griff zum Taschenrechner, selbst wenn es gar nichts zu berechnen gibt. Beim Erstellen meiner Steuererklärung habe ich bei mir selbst mit Entsetzen beobachtet, dass ich den Taschenrechner auch bei Additionen zu Hilfe nahm, die ich gut im Kopf hätte vornehmen können. Auch ich hatte also eine gute Übungsmöglichkeit in den Wind geschlagen. Bei Schülern, die ähnlich bequem vorgehen, pflege ich ermahrende Bemerkungen von mir zu geben. Vor einiger Zeit etwa, als die Wertetabelle von $y = x^2 - 1$ bei niemandem einen vernünftigen Graphen ergeben wollte. Ich ließ noch mal nachrechnen und sah mit Entsetzen, dass die Berechnungen $0^2 - 1$, $1^2 - 1$, $(-1)^2 - 1$ samt und sonders mit dem Taschenrechner getätigt wurden, sehr oft auch noch mit falschen Ergebnissen. Die Schwierigkeiten beim Erstellen der Wertetafel waren so groß, dass das Problem, wie die Parabel mit der Normalparabel zusammenhängt, völlig in den Hintergrund trat.

An diesen Schülern und an mir selbst konnte ich den Effekt beobachten, der jedem Autofahrer wohlbekannt ist: Aus Bequemlichkeit verwendet man das Auto auch dort, wo es eigentlich nicht nötig ist. Wenn man nicht aufpasst, verlernt man so das Gehen. (Der Vergleich hinkt, immerhin gibt es eine Menge Leute, die mit ihrem Auto in den Wald fahren, um sich dort stundenlang dem Walking, Power Walking oder Nordic Walking hinzugeben.)

In den Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom Dezember 2007 sind einige Zeitungsartikel aus der Braunschweiger Zeitung zu diesem Thema abgedruckt. Mehrere Hochschulprofessoren klagen in

diesen Beiträgen über die mangelnden Rechenfertigkeiten der Studienanfänger.

Aber nicht nur Professoren der Natur- und Ingenieurwissenschaften, auch die Ausbilder der künftigen Mathematiklehrer und -lehrerinnen erschrecken. Die Rechenschwäche ist inzwischen bei den Lehramtsstudierenden angekommen. Ich verkneife mir einige Anekdoten aus der Zwischenprüfung. Tröstlich ist nur, dass die Studierenden durchaus ihre Mängel auf diesem Gebiet kennen, wie eine Befragung im Rahmen einer Dissertation (Bescherer 2003) ergeben hat. Offensichtlich ist es aber schwierig, diesen Mangel aus eigener Kraft zu beheben. In den Schulpraktika sehe ich viel zu selten, dass die Studierenden ihre Schüler zu Überschlügen anregen, und oft habe ich den Verdacht, dass das aus einer Unsicherheit heraus geschieht. Ich hoffe inständig, dass sich diese Unsicherheit in den kommenden Berufsjahren gibt; dies ist aber keinesfalls selbstverständlich, und man kann durchaus die Gefahr sehen, dass das Kopfrechnen aus dem Bewusstsein von Schülern und Lehrern entschwindet (the blind leads the blind).

Was ist so schlimm daran?

Ist dieses Gejammere über die Jugend nicht eine typische Alterserscheinung? Was ist so schlimm daran, dass junge Leute andere, modernere Fertigkeiten entwickeln und sich bei Handlungen, die heute nicht mehr so oft vorkommen, eher ungeschickt verhalten? Dieser Einwand muss wirklich bedacht werden, teilweise stimmt er sicherlich. Nicht alles, was im Verschwinden begriffen ist, können wir bewahren. Aber wir müssen schon genau hinschauen, welche unliebsamen Begleiterscheinungen auftreten können. Wieder ziehe ich das obige Gleichnis heran: Durch die Erfindung des Automobils müssen wir nicht mehr große Strecken zu Fuß zurücklegen, und das ist sicher angenehm; über die Begleiterscheinungen wie Feinstaub und Fettleibigkeit müssen wir uns aber durchaus Gedanken machen.

Kopfrechnen ist in erster Linie wichtig, weil es einen unverzichtbaren Beitrag zu den grundlegenden Vorstellungen des Zahlbegriffs leistet. Ein Gefühl für Zahlen ist uns nicht in die Wiege gelegt, die Evolution hatte noch nicht genug Zeit, uns die entsprechenden Fähigkeiten zu verleihen. Wenn wir trotzdem recht gut mit Zahlen umgehen können, so verdanken wir das unserer Sprachbegabung und unserem Raumvorstellungsvermögen. Die Gehirnforscher (Spitzer 2002) berichten uns, dass man beobachten kann, wie bei Zahloperationen die entsprechenden Gehirnareale aktiviert werden und miteinander korrespondieren. Dabei ist das Sprachzentrum mehr für digitale, das Raumvorstellungszentrum mehr für analoge Operationen zuständig. Im Zusammenwirken von digitalen und analogen Aspekten erwerben wir ein Gefühl für Zahlen, einen „Zahlensinn“. Unser Gehirn arbeitet nicht wie ein Digitalcomputer, sondern wohl eher wie eine raffinierte Kombination von Analog- und Digitalrechner (Dehaene 1999). Durch die Digitalisierung unse-

rer Umgebung wurden die analogen Darstellungen von Zahlen und Größen immer mehr zurückgedrängt. Wecker, Waagen, Thermometer haben heute sehr oft eine digitale Anzeige, wo früher nur eine analoge möglich war. Dasselbe Bild ergibt sich bei physikalischen Messinstrumenten. Und schließlich wurde im Mathematikunterricht der Rechenstab durch den Taschenrechner ersetzt. Deshalb ist die Gefahr heute noch größer als früher, dass unter einer Zahl nur noch eine Abfolge von Ziffern verstanden wird, dass oft gar nicht mehr versucht wird, ihr (in ihrem jeweiligen Zusammenhang) einen Sinn zu geben.

Diese eingeschränkte digitale Vorstellung ist für die Mathematik nicht hinnehmbar. Eine Zahl ist mehr als die Folge ihrer Dezimalziffern. Notwendiger denn je ist die Fähigkeit, je nach Bedarf eine angemessene Überschlagsrechnung machen zu können. Zahlen dienen nicht nur dazu, etwas möglichst exakt auszudrücken, genauso wichtig ist es, dass man mit ihrer Hilfe oft ungenaue, ungefähre Angaben machen kann.

Die Mathematik hat sich aus dem Umgang mit den Zahlen entwickelt, die Zahlen bilden zusammen mit der Geometrie die Grundlage dieser Wissenschaft. Insofern ist eine möglichst breite Grundvorstellung der Zahlen und ihrer Operationen dringend erwünscht. Ohne Kopfrechnen, insbesondere Überschlagsrechnungen sind solche Grundvorstellungen nicht möglich. Die Kompetenzen, die unsere Schüler erwerben sollen, wie Problemlösen, Modellieren, Erkennen von funktionalen Abhängigkeiten sind ohne ein sicheres Bewegen im Zahlenraum, eine gründliche Vertrautheit, einen souveränen Umgang mit Zahlen nicht möglich. Diese Voraussetzungen sind nicht selbstverständlich, es dauert lange, bis sie zur Verfügung stehen. Wenn dies nicht der Fall ist, so baut man auf Sand.

Was tun?

Wenn wir die Misere konstatieren, was tun wir dann dagegen? Eine nahe liegende Möglichkeit ist es, den Taschenrechner zu verbieten. An vielen Hochschulen und Gymnasien sind Taschenrechner bei manchen Klausuren erlaubt, bei anderen verboten. Dahinter steckt der Gedanke „Fördern durch Fordern“ und das ist sicher nicht ganz falsch. Aber allein genommen ist diese Maßnahme doch bedenklich, andere Motivationen zum Kopfrechnen sollten schon noch unterstützend dazu kommen. Denn ein Schüler, der nicht kopfrechnen kann, wird vielleicht vor der entsprechenden Klassenarbeit Angst haben; es ist aber eher unwahrscheinlich, dass er sich dann noch schnell das Kopfrechnen selbst beibringt (das ist auch gar nicht so einfach, fast so schwierig, wie sich selbst zu kitzeln). Bei Gesprächen mit Lehrern der Sekundarstufe habe ich festgestellt, dass viele das Kopfrechnen für eine Aufgabe der Grundschule halten und sich selbst weniger zuständig fühlen. Wenn man in manche Schulbücher der Sekundarstufe schaut, könnte man auch diesen Eindruck gewinnen. Während es sich in der Grundschule schon

weitgehend durchgesetzt hat, dass Kinder flexibel und eigenständig rechnen sollen (Rathgeb-Schnierer 2006), scheint man in der Sekundarstufe oft noch stark an Formeln und zugehörigen Einsetz- und Umwandlungsübungen zu hängen. Bei Lehrern, die sich am Schulbuch orientieren, besteht die Gefahr, dass das Kopfrechnen zu kurz kommt.

Es gibt durchaus Lehrer, die sich dieser Gefahr bewusst sind und sich Übungsformen zum Kopfrechnen überlegt haben. Bei der so beliebten Stationenarbeit können ja bei manchen Stationen Taschenrechner erlaubt, bei anderen verboten sein. Alte Übungsformen wie das „Vier-Ecken-Rechnen“ haben in abgelegenen Winkeln Oberschwabens bis heute überlebt. Und ich kenne Lehrer, die fast jede Stunde zur Aufwärmung mit Kopfrechnen oder Kopfgeometrie beginnen. Beim Thema Kreisfläche müssen der Durchmesser eines Rohrs und die Querschnittsfläche geschätzt werden, ein anderes Mal muss die Wurzel aus 90 geschätzt werden, usw. Allerdings sind all dies Einzelinitiativen, der Lehrer in der Parallelklasse handelt dasselbe Gebiet vielleicht ganz anders ab, da er sich mehr an der Abschlussprüfung orientiert.

Wenn man sich unter den Schulbüchern umsieht, so fällt in Bezug auf das Kopfrechnen das Zahlenbuch aus Klett und Balmer Verlag (Affolter 2001) besonders auf. Hier werden konkrete Kopfrechenübungen angeboten. Dem Lehrer wird im Lehrerhandbuch der Klasse 6 ans Herz gelegt: „Dem sicheren und automatisierten Rechnen wird im Zahlenbuch große Bedeutung beigemessen. Im Gegensatz zu den strukturierten Übungen, die dem Einüben und Verstehen dienen, geht es beim Kopfrechnen darum, dass man die vorgegebenen Rechnungen in beliebiger Reihenfolge sicher und mit einer gewissen Routine, d.h. ohne sich den Rechenweg überlegen zu müssen, lösen kann. Der Sinn des geläufigen Kopfrechnens liegt darin, dass man sich bei komplexeren Sachaufgaben auf die wesentlichen Dinge der Aufgabe konzentrieren kann. Zudem dient sicheres Kopfrechnen auch dem Abschätzen von Lösungen einer Aufgabe.“

Bei Zech (1995) findet man wertvolle Vorschläge zur Entwicklung der Grundvorstellungen von gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen. Insbesondere die Dezimalbrüche werden oft zu selbstverständlich genommen. Zech befürwortet viele Ablese- und Eintragungsaufgaben an verschiedenartigen Dezimalskalen. Wer solche Übungen in der Klasse ausprobiert, wird schnell feststellen, wie nötig sie sind. Daran anschließen kann man in nahe liegender Weise Rechenaufgaben. Man addiert dann nicht Ziffernfolgen, sondern Punkte auf dem Zahlenstrahl und unterstützt damit die analoge Vorstellung.

Wenn jetzt jemand fragt, woher die Zeit für all diese Übungen kommen soll, so ist die Antwort nahe liegend: Die schriftlichen Rechenverfahren könnten als Steinbruch dienen. Sie werden in der Praxis überall durch den Taschenrechner ersetzt, und ein Vernachlässigen oder gar Weglassen würde keinen allzu großen Schaden anrichten. Ein durchdachtes Kombinieren von Kopfrechnen, eigenständigem halbschriftlichem Rechnen und dem Gebrauch

des Taschenrechners könnte das Zahlgefühl fördern und damit eine bessere Basis für die gesamte Schulalgebra schaffen.

Literatur

- Affolter, W. u.a. (2001). *Das Zahlenbuch*. Begleitband 6. Schuljahr, Zug: Klett / Balmer.
- Bescherer, C. (2003). *Selbsteinschätzung der mathematischen Studierfähigkeit von Studienanfängerinnen und -anfängern*. Dissertation; online veröffentlicht unter URN:nbn:de:bsz:93-opus-16269
- Dehaene, S. (1999). *Der Zahlensinn oder warum wir rechnen können*. Basel: Birkhäuser.
- Rathgeb-Schnierer, E. (2006). *Kinder auf dem Weg zum flexiblen Rechnen*. Hildesheim: Franzbecker.
- Spitzer, M. (2002). *Lernen, Gehirnforschung und die Schule des Lebens*. Heidelberg: Spektrum.
- Zech, F. (1995). *Mathematik erklären und verstehen*. Berlin: Cornelsen.

Albrecht Abele
Pädagogische Hochschule Heidelberg

Das Zahlenlotto 6 aus 49 – Erste Erfahrungen mit Wahrscheinlichkeiten

Summary

The paper consists of three sections: 1st, preliminary notes of information to the topic summarised from the school curricula of Baden-Württemberg; 2nd, a systematical course with a draft of the topic ‚statistics/probability‘ with reference of a known school book; 3rd, suggestions of an ‚exemplary approach‘ in connection with the proposals of Martin Wagenschein. With suitable tasks for pupils suggestions are given to create possibilities for a learning process on the basis of pupils‘ experiences, and we fulfil with this the hints of the curriculum, to contribute to a lively and motivating culture of learning for the pupils¹.

1 Vorbemerkungen

Nach nunmehr rund 20 Jahren (!) tauchen wieder Inhalte zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik im Bildungsplan für die Realschulen² des Landes Baden-Württemberg auf, in abgeschwächter Form auch für die Hauptschulen³. Schon für die Grundschule ist vorgesehen⁴, einfache Elemente statistischen Denkens im Mathematikunterricht zu verankern. Die Chance allerdings wird nicht wahrgenommen, vor der 10. Klasse der Realschule oder schon in der Grundschule⁵ den Schülerinnen und Schülern Erfahrungen mit Zufallsexperimenten zu ermöglichen.

Im derzeit gültigen Bildungsplan für die Grundschule⁶ aus dem Jahr 2004 findet man in Kapitel II *Kompetenzen und Inhalte* für Klasse 2 unter der 4. *Leitidee: Muster und Strukturen* u.a.:

Die Schülerinnen und Schüler können

- *einfache Sachsituationen in Tabellen und Schaubildern darstellen, lesen und interpretieren.*

Möglicherweise haben jedoch die Autoren des Bildungsplanes an dieser Stelle noch nicht an Sachsituationen gedacht, welche statistisch interpretiert und aufgearbeitet werden oder zu Begriffen der Wahrscheinlichkeitsrechnung hinführen könnten. Deutlicher wird dieser Bezug bei den Nennungen unter der 6. *Leitidee: Daten und Sachsituationen*:

Die Schülerinnen und Schüler können

- aus Beobachtungen, aus einfachen Experimenten oder aus einfachen Texten Daten sammeln, erheben und darstellen;
- Daten aus [...] Darstellungen entnehmen und daraus Informationen und Schlüsse ziehen;
- bei [...] Textaufgaben aus dem Text mathematisch relevante Informationen entnehmen, diese in eine mathematische Struktur übertragen, lösen und das Ergebnis überprüfen;
- in [...] Sachverhalten, die in Schaubildern oder Diagrammen dargestellt sind, relevante Fragen erkennen.

Diese Lernziele sollen erreicht werden mit den *Inhalten*:

- Strichliste, Häufigkeitstabelle;
- Skizzen, Pläne, Schaubilder.

Für Klasse 4 finden sich unter der 5. *Leitidee: Daten und Sachsituationen* die *Inhalte*:

- Schaubilder, Diagramme, Skizzen, Pläne;
- Projektpräsentation.

Das deutet darauf hin, dass sich der Lernfortschritt bis zum Ende des 4. Schuljahres nicht im Bereich der Erfahrungen zur Statistik ausmachen lässt sondern in den „traditionellen Bereichen“ des Sachrechnens. Allerdings findet man hierzu unter den aufgezählten Lernzielen im Vergleich mit Klasse 2 lediglich zwei deutliche Erweiterungen:

Die Schülerinnen und Schüler können

- eigene Lösungswege erklären und vorstellen;
- ein selbst erfundenes Mathematikspiel präsentieren.

Im Übrigen sind die geforderten Lernzuwächse durch interpretationsfähige Adjektive vorgegeben, wie in der Übersicht angegeben.

| Formulierung 2. Klasse | Formulierung 4. Klasse |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| aus <u>einfachen</u> Texten Daten sammeln | aus Texten Daten sammeln |
| Daten aus <u>vereinfachten</u> Darstellungen entnehmen | Daten aus <u>unterschiedlichen</u> Darstellungen entnehmen |
| bei der Bearbeitung von <u>einfachen</u> Textaufgaben | bei der Bearbeitung von Textaufgaben |
| in <u>einfachen</u> Sachsituationen und Sachverhalten, die in <u>Schaubildern</u> oder <u>Diagrammen</u> dargestellt sind, <u>relevante Fragen erkennen</u> | Sachsituationen und Sachverhalte, die in Bildern, <u>Tabellen</u> und <u>Diagrammen</u> dargestellt sind, <u>interpretieren</u> und <u>mathematisieren</u> |

Die Weiterführung dieser Erfahrungen in der Realschule werden für Klasse 6 in Abschnitt II *Kompetenzen und Inhalte* unter der 4. *Leitidee: Daten* so beschrieben:

Die Schülerinnen und Schüler können

- *gängige Darstellungen in Veröffentlichungen lesen und Informationen entnehmen;*
- *Tabellen lesen und auswerten;*
- *Erhebungen zu einer Fragestellung aus der eigenen Erfahrungswelt machen;*
- *Daten sammeln und in Tabellen erfassen.*

Als zugehörige *Inhalte* werden genannt:

- *Listen;*
- *Häufigkeitstabellen;*
- *Mittelwert.*

Auch die folgenden Lernziele aus der 6. *Leitidee: Modellieren* lassen sich auf dem Hintergrund statistischer Methoden interpretieren:

Die Schülerinnen und Schüler können

- *Fragestellungen die passende Mathematik zuordnen;*
- *Situationen angemessen modellieren, [...];*
- *mathematischen Modellen passende Situationen zuordnen;*
- *mathemathikhaltige Texte sinnentnehmend lesen;*
- *Probleme in ihrer Komplexität erfassen und sie durch die Wahl geeigneter Modelle beschreiben und bearbeiten;*
- *die verwendeten mathematischen Modelle reflektieren.*

Neben den üblichen Inhalten aus Algebra und Schlussrechnung werden hierzu genannt:

- *Kreis-, Säulen-, Balkendiagramm;*
- *Tabellenkalkulation.*

Das unter der 1. *Leitidee* für das 6. Schuljahr angegebene Lernziel, *unterschiedliche Lösungswege* anzugeben, zu *verbalisieren und hinterfragen*, ist in seiner Formulierung so allgemein, dass es auf jedem Inhaltsfeld der Mathematik, also auch bei Lerninhalten der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, beachtet werden sollte.

Für Klasse 8 werden in dem Kapitel *Kompetenzen und Inhalte* mit den beiden *Leitideen: Daten* und *Modellieren* die Erfahrungen der Schüler im Umgang mit *Tabellen, grafischen Darstellungen* und *mathematischen Modellierungen bei deren Erstellung und Interpretation* weiter geführt, ohne jedoch zusätzliche Inhalte zu benennen.

Erst für Klasse 10 weist schon die Änderung des Titels der 5. *Leitidee: Daten und Zufall* auf die Aufnahme neuer Lerninhalte hin, die der Stochastik zuzurechnen sind. Bei den Lernzielen erscheinen neben den erneut formulierten Zielen zum Umgang mit Daten und deren Verarbeitung zwei Formulierungen, die auf Inhalte der Wahrscheinlichkeitsrechnung hinweisen.

Die Schülerinnen und Schüler können

- *Daten systematisch sammeln und übersichtlich darstellen;*
- *Daten erfassen, entnehmen, transferieren;*
- *verschiedene mathematische Darstellungen verwenden;*
- *Daten interpretieren;*
- *Aussagen, die auf Datenanalysen basieren, reflektieren und bewerten;*
- **Wahrscheinlichkeitsaussagen verstehen;**
- **Wahrscheinlichkeiten bestimmen – zweistufige Zufallsversuche;**
- *logisch schließen und begründen.*

Die genannten *Inhalte* sind:

- *Häufigkeitstabellen (s.o. Klasse 6);*
- *Diagramme (s.o. Klasse 6, 8);*
- **Baumdiagramme (neu);**
- **Pfad- und Summenregel (neu).**

Eine Grundidee des vorliegenden Bildungsplanes ist es, Bildungsstandards zu definieren, die im Zweijahresabstand der Schuljahre erreicht werden sollen, also nach dem 2., 4., 6., 8., 10. Schuljahr, ohne jedoch die gesamten Inhalte systematisch zu ordnen oder im Einzelnen vorzuschreiben. Prinzipiell haben also die Lehrenden als einzelne Personen oder als Gruppe, z.B. für eine Klassenstufe, die Verantwortung für die Verteilung der Inhalte auf die Unterrichtseinheiten des Schuljahres.

Zuerst sollte jedoch geklärt sein, welche Zielrichtung die einzelnen Unterrichtseinheiten verfolgen sollen. Betont man in der *Leitidee Daten und Zufall* nicht die Inhalte der beschreibenden Statistik sondern die der Wahrscheinlichkeitsrechnung – wie dies der vorliegende Bildungsplan für Klasse 10 tut –, stößt man auf die beiden Hauptfragestellungen:

- a) Wie kann man aus bekannten Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen die Wahrscheinlichkeit anderer Ereignisse berechnen, die von jenen abgeleitet sind?
- b) Wie kann man für Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeit unbekannt ist, diese bestimmen?

Wollte man den Themenbereich der *beschreibenden Statistik* weiter bearbeiten, wird man auf die beiden folgenden Hauptfragen geführt:

- c) Welche *Maßzahlen* kann man verwenden, um Gesamtheiten miteinander zu vergleichen (z.B. Mittelwert, Zentralwert, Standardabweichung)?
- d) Welche Schlüsse kann man aus einer in ihren Eigenschaften *bekannt*en Stichprobe für die *unbekannte* Gesamtheit ziehen, aus welcher die Stichprobe entnommen wurde? Oder:

Welche Bedingungen muss eine Stichprobe erfüllen, damit aus ihren Eigenschaften auf die Eigenschaften der Gesamtheit geschlossen werden kann?

Der vorliegende Beitrag beschränkt sich auf Anregungen zur Bearbeitung von Themen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Realschule. Schwerpunktmäßig folgt der Aufbau der Unterrichtseinheit einer Serie von schülernahen Aufgaben, die mit gewissen Abstrichen auch in der Hauptschule bearbeitet werden können. Interessenten für Inhalte aus der beschreibenden Statistik finden Hinweise und Anregungen z.B. in Abele 1977 a.

Um die im Bildungsplan verlangten Bildungsstandards der Wahrscheinlichkeitsrechnung/Statistik zu erreichen, lassen sich je nach didaktischer Grundposition zwei prinzipiell verschiedene Zugangswege erschließen, wie dies bei anderen Inhaltsbereichen auch der Fall ist:

1. Der systematische Lehrgang („vom Leichten zum Schweren“).
2. Das exemplarische Vorgehen (im Sinne von Martin Wagenschein).

Zunächst wird in Kurzform ein systematischer Lehrgang vorgestellt, wie er üblicherweise in Lehrbüchern für die Realschule abgehandelt wird (z.B. in Bentzinger/Hofsäß 1993). Der dann folgende Abschnitt entfaltet einen Vorschlag zu motivierendem exemplarischem Vorgehen.

2 Systematischer Lehrgang

Der skizzierte Lehrgang folgt diesen Schritten:

Grundbegriffe

1. Erste Erfahrungen durch eigene Experimente der Schülerinnen und Schüler (Würfel, Glücksrad, Gefäß mit verschiedenen Kugeln).

Begriffe: *mögliches Ereignis*, Gewinn-Ereignis, *günstiges Ereignis*.

2. Abschätzen und Berechnen der „Gewinn-Chance“.

Begriff: *Wahrscheinlichkeit* w über der Gesamtheit aller Ereignisse,

$$\text{Wahrscheinlichkeit} = \frac{\text{günstige F\ddot{a}lle}}{\text{m\ddot{o}gliche F\ddot{a}lle}}$$

$$w = \frac{g}{m},$$

wobei g für die günstigen Fälle, m für alle möglichen Fälle steht.

3. Durchführung vieler Versuche.

Begriff: *relative Häufigkeit*.

4. Zusammenhang von „Wahrscheinlichkeit“ und „relativer Häufigkeit“.

Zweistufige Versuche

5. Zwei Glücksräder nacheinander bedienen, aus einem Gefäß mit Kugeln 2 mal ziehen mit und ohne Zurücklegen der gezogenen Kugeln.

6. Baum für Häufigkeiten, Baum für Wahrscheinlichkeiten.

Produktregel für Wahrscheinlichkeiten von 2 voneinander unabhängigen Ereignissen.

(Erfahrungen zur *Summenregel* werden nicht angeboten.)

Kombinatorisches Anordnen

7. *Permutationen* von endlich vielen Objekten.

Das Lottoproblem

8. Gesamtheit aller Möglichkeiten, beim Zahlenlotto 6 Kugeln aus 49 Kugeln zu ziehen.

9. Anzahl der ungeordneten Sechsertipps.

10. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit unterschiedlichen Einsätzen beim Lotto „6 aus 49“ mit 6 Richtigen zu gewinnen?

11. Abstützen des Verständnisses durch Vereinfachung des Problems (Variation der Daten).

3 Vorschläge zum exemplarischen Vorgehen

Didaktische Intention

Exemplarisches Vorgehen erfordert Aktivität der Schüler an einschlägigen Beispielen. Da es in der Realschule nicht Ziel sein kann, eine formelmäßige Erfassung der erarbeiteten Zusammenhänge anzustreben, müssen die Lernerfahrungen der Schüler, überprüft durch vielfältige Variation, in geeigneten Darstellungen einprägsam fixiert werden. Es sind also drei methodische Schwerpunkte, die durch die Leitbegriffe *Motivation*, *Variation*, *Darstellung* bestimmt sind, besonders zu bedenken.

Motivation

Die Anordnung der Aufgaben nach zunehmender Schwierigkeit von Anfang an kann häufig eine sachbezogene Motivation der Schüler behindern, da die

Lösung einfacher „Probleme“ – oft eher trivial – keine auf schwierigere Probleme übertragbare Strategie liefert. Im Gegensatz dazu kann eine schwierige Fragestellung auf Schüler eine starke Faszination ausüben, Beispiel hier:

Wie groß ist die Chance, im Lotto mit 6 Richtigen zu gewinnen?

Die Frage reizt zur Auseinandersetzung, kann aber aufgrund der komplexen Struktur von den Schülerinnen und Schülern nicht im ersten Anlauf beantwortet werden. Erst die Suche nach Nachbaraufgaben, nach verwandten Problemen, die eine einfachere Struktur aufweisen, die man vielleicht auch im Klassenverband durchspielen kann, führt zu fruchtbaren Denkanstößen und zielgerichtetem Nachdenken und Probieren der Schüler.

Variation

Die geeignete Variation der Problemstellung durch Veränderung der vorkommenden Zahlen, also durch Veränderung der Situation in eine einfachere, aber gleichwertige, „isomorphe“ Struktur, die dem Schülerexperiment leichter zugänglich ist, ist es, die den Lernenden einen angemessenen Zugang zum vorliegenden Problem und damit zu möglichen Lösungswegen eröffnet. Produktive Arbeitsmöglichkeiten werden geschaffen, die den Prinzipien der Selbsttätigkeit und Differenzierung weitgehend Rechnung tragen. Die in diesem Zusammenhang auftauchenden (Grund-)Aufgaben aus dem Gebiet der Kombinatorik werden nicht als abgesondertes Kapitel bearbeitet, sondern aus der vorliegenden Problemstellung gewonnen und an einprägsamen Beispielen in ihrem gegenseitigen Zusammenhang gesehen.

Darstellung

Situationsskizzen, Tabellen und vor allem Baum- und Pfaddiagramme sind wesentliche Hilfen für die Gedankenführung bei der Problemanalyse und bei der numerischen Bewältigung der Aufgaben. Umständlichere Berechnungen sollten mit Hilfe von Taschenrechnern ausgeführt werden. Formale Bezüge und Bezeichnungen aus der Fachterminologie treten gegenüber inhaltlichen Überlegungen, die gegebenenfalls vorstellungsmäßig ans Experiment gebunden sind, zurück. Es wird z.B. empfohlen, auf die Bezeichnungen aus der Kombinatorik völlig zu verzichten und auch bei der sprachlichen Fassung der Begriffe sich auf Modellvorstellungen aus den Experimenten (z.B. „Ziehen von Kugeln aus einem Behälter“) zu stützen.

Diesem Dreischritt folgend wird nun zuerst das „Lottoproblem“ als *motivierender* Auslöser angeboten. Dann werden zur *Variation* verschiedene Beispiele vorgestellt, um abschließend mit weiteren Beispielen die Anwendung der üblichen *Darstellungsformen* (Baum- und Pfaddiagramm) vorzuschlagen und damit zu den einfachen Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Produktregel, Summenregel) hinzuführen.

Das Lottoproblem (Motivation)

Beim Zahlenlotto „6 aus 49“ gewinnt man bekanntlich im ersten Rang, wenn man die 6 ausgelosten Zahlen alle richtig erraten hat.

Gibt man einen einzigen Tipp ab, z.B. 9 | 19 | 20 | 22 | 39 | 46 |, hat man eine Gewinnchance von „1 zu allen möglichen Sechsertipps“. Wie viele sind das?

| | | | | | | |
|-----------|----------|----|-----------|-----------|-----------|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 8 | <u>9</u> | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 15 | 16 | 17 | 18 | <u>19</u> | <u>20</u> | 21 |
| <u>22</u> | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 |
| 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 |
| 36 | 37 | 38 | <u>39</u> | 40 | 41 | 42 |
| 43 | 44 | 45 | <u>46</u> | 47 | 48 | 49 |

Um dies zu erfahren spielen wir ein einfacheres Lotto: „2 aus 5“.

Hilfsprobleme (Variation)

Lotto „2 aus 5“

Wer die 2 ausgelosten Zahlen richtig voraussagt, hat gewonnen. Wie viele Zweiertipps gibt es hier?

| | |
|----------|----------|
| 1 | <u>2</u> |
| <u>3</u> | 4 |
| | 5 |

Verschiedene Lösungsstrategien bieten sich an:

a) Abzählverfahren

Man bildet mit Zahlenkärtchen alle möglichen Zweiertipps:

[1][2] | [1][3] | [1][4] | [1][5]
 [2][1] | [2][3] | [2][4] | [2][5]
 [3][1] | [3][2] | [3][4] | [3][5]
 [4][1] | [4][2] | [4][3] | [4][5]
 [5][1] | [5][2] | [5][3] | [5][4]

Es sind 5 Zeilen mit je 4 Zweiertipps; das sind 20 *geordnete Paare*. Beim Zahlenlotto werden die ausgelosten Zahlen nach ihrer Größe sortiert, so dass die Reihenfolge der Ziehung keine Rolle mehr spielt. Damit kommt jeder Zweiertipp 2 mal vor (z.B. der Gewinntipp als [2][3] und [3][2]), und die Gesamtheit aller Zweiertipps besteht aus 10 *ungeordneten Paaren*. Die Gewinnchance ist 1 : 10 oder als Bruch 1/10.

b) Rollenspiel

5 Schüler – 2 Stühle: Je 2 der 5 Schüler besetzen die 2 Stühle. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Kinder, auf den Stühlen Platz zu nehmen? Werden die beiden Stühle nacheinander besetzt, gibt es beim 1. Stuhl 5 Möglichkeiten, beim 2. Stuhl jedes Mal noch 4 Möglichkeiten der Belegung, also insgesamt 5·4 Möglichkeiten. Dabei nehmen abhängig von der Reihenfolge alle Kinder nacheinander auf beiden Stühlen Platz (*geordnete Paare*, s.o. bei (a)).

c) Grafische Repräsentation

Man verbindet je 2 Zahlen im obigen Zahlenfeld (1, 2, 3, 4, 5) und zählt alle Verbindungslinien: Von 1 aus sind es 4, von 2 aus 3, von 3 aus 2, von 4 aus 1, damit sind es $4+3+2+1 = 10$ Verbindungslinien. Jede Verbindungslinie repräsentiert ein Zahlenpaar. Man erhält so direkt „*ungeordnete Paare*“, denn die Zeichenrichtung des Stiftes von 1 nach 2 oder von 2 nach 1 bleibt außer acht.

d) Mit der Lösung c) kann man auch unter Verwendung der sonst üblichen Terminologie die Vorstellung verbinden, alle *Teilmengen mit 2 Elementen* zu bilden.

Kommentar

Mit dieser Aufgabe machen die Schülerinnen und Schüler erste Erfahrungen mit dem *Anordnungsproblem* der Kombinatorik. Die Aufgabe kann außer den oben genannten Vorschlägen in vielfältiger Weise modifiziert werden:

- *hinsichtlich des Kontextes* („*Einkleidung*“);
- *hinsichtlich der vorliegenden Zahlen*.

Beispiele für Kontextveränderungen:

- Zweifarbige Streifenmuster für Fahnen aus 5 Farben auswählen.
- Zweistellige Zahlen aus den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 ohne Ziffernwiederholung bilden.
- Lose oder Kugeln ziehen: In einem Behälter sind 5 Kugeln mit verschiedenen Nummern (z.B. 1, 2, 3, 4, 5). Nacheinander werden 2 Kugeln gezogen; die gezogene Kugel wird nicht zurückgelegt oder sie wird zurückgelegt und kann dann noch einmal gezogen werden.

Beispiele für Veränderung der Zahlen:

- Beim Lotto „2 aus 5“ kann jede der beiden Zahlen verändert werden.
- Zweistellige Zahlen aus allen Ziffern ohne 0, ohne Ziffernwiederholung bilden.
- Dreistellige Zahlen aus allen Ziffern ohne 0, ohne Ziffernwiederholung bilden.
- Allgemeine Formulierung: Man zieht k Kugeln aus einem Behälter mit n Kugeln ohne Zurücklegen (oder mit Zurücklegen) der gezogenen Kugeln ($k \leq n$).

Diese Aufgabe liefert auch eine zwanglose Erstbegegnung mit standardisierten Formulierungen wie „*Ziehen ohne Zurücklegen*“ der gezogenen Kugel, „*Ziehen mit Zurücklegen*“ oder Notation der Ergebnisse „*unter Berücksichtigung der Reihenfolge*“ bzw. „*der Anordnung*“ oder „*ohne*“ deren Be-

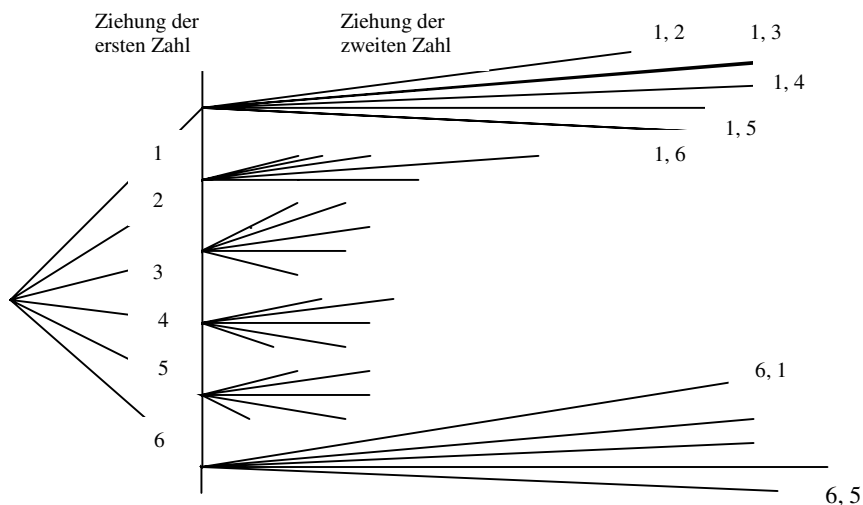
rücksichtigung. Auf eine systematische Behandlung aller möglichen Fallunterscheidungen dieser Aufgabentypen kann jedoch verzichtet werden.

In einer Unterrichtssequenz zu diesem Thema können sich nach dem Lotto „2 aus 5“ folgende Aufgaben anschließen, um die intendierten Verallgemeinerungsprozesse auszulösen:

Lotto „2 aus 6“

Auf der Suche nach allen Zweiertipps kommen wieder die schon beim Lotto „2 aus 5“ verwendeten Lösungsverfahren zum Einsatz. Außerdem ist es zweckmäßig, hier – d.h. noch bei Aufgaben mit kleinen Zahlen – die Verwendung des *Entscheidungsbaumes* als nützliche Hilfe für die Gedankenführung anzubahnen.

Baumdarstellung

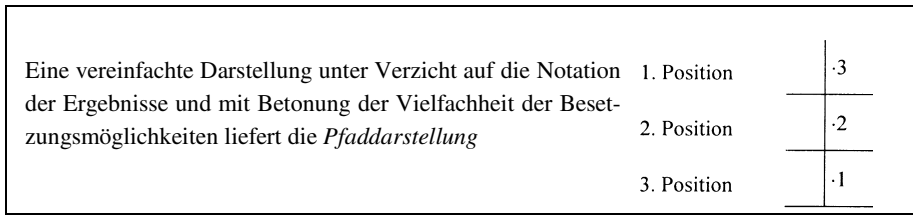
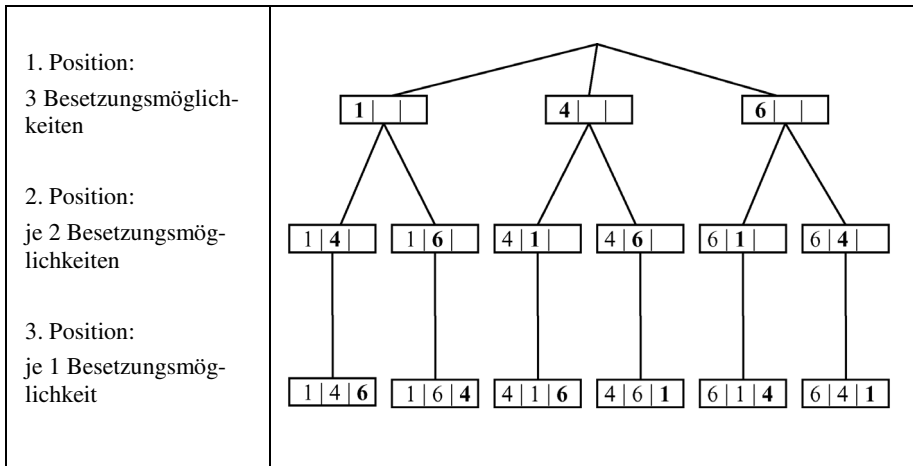


Bei der Baumdarstellung entsteht ein Entscheidungsbaum mit $6 \cdot 5$ Zweigenden, welche die geordneten Zweiertipps repräsentieren. Die Anzahl der Zweiertipps *ohne Berücksichtigung der Anordnung* ist halb so groß.

Lotto „3 aus 6“

Der Entscheidungsbaum liefert $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ Zweigenden für 120 *geordnete Dreiertipps*. Zusätzlich ist nun aber zu ermitteln, wie viele Möglichkeiten es für die 3 Gewinnzahlen (z.B. 1, 4, 6) gibt, sich auf 3 Positionen zu verteilen.

Auch diesmal liefert ein Baumdiagramm eine gute Übersicht für das Ergebnis: Es sind $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Möglichkeiten.



Der Gewinntipp mit den nach ihrer Größe aufgelisteten Zahlen 1, 4, 6 ist also in der Vielfachheit $3 \cdot 2 \cdot 1$, d.h. 6fach vorhanden. Die Anzahl aller möglichen *ungeordneten* Dreiertipps erhält man also als Bruch

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Schreibt man diesen Bruch in dieser ausführlichen Darstellung – und nicht $120:6$, was nahe liegend gewesen wäre, – ist eine Verallgemeinerung leichter zugänglich.

Lotto „k aus n“ ($k \leq n$)

Weitere ähnliche Aufgaben folgen mit dem Ziel einer „Verallgemeinerung“, d.h. Erkennung der Regel; spezielle Zahlen wählen, ohne Verwendung der Variablen k, n!

Es ist günstig, bei einer Fortsetzung der Aufgabenserien (2 aus 6, 3 aus 6, 4 aus 6, 5 aus 6 / 2 aus 8, 3 aus 8, 4 aus 8, 5 aus 8, ... / usw.) zuerst k wachsen zu lassen, bis n erreicht ist, dann n zu vergrößern und bei der neuen Aufgabenserie analog zu verfahren. Verfolgt man die in jeder Serie enthaltenen Gesetzmäßigkeiten, stößt man auf das Pascalsche Dreieck mit weiteren Entdeckungsmöglichkeiten. Dieser Seitenweg bringt eine Vertiefung, die nicht direkt zur Wahrscheinlichkeitsrechnung hinführt.

Lotto „6 aus 49“

Nach den vorbereitenden Aufgaben ist zu erkennen, dass es bei der Ziehung der ersten Zahl 49 Möglichkeiten gibt, bei der zweiten Zahl 48, usw., bei der sechsten Zahl sind es noch 44 Möglichkeiten. Unter *Berücksichtigung der Anordnung* gibt es daher

$$49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 = 10\,068\,347\,520$$

Möglichkeiten für einen Sechsertipp. Da beim Lottospiel die Reihenfolge der gezogenen Zahlen und damit deren *Anordnung* keine Rolle spielt, ist die erhaltene Zahl durch die Anzahl der Anordnungsmöglichkeiten zu dividieren, die es für 6 Zahlen (einen Sechsertipp) gibt. Das sind $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ Möglichkeiten. Für den Lottotipp 6 aus 49 gibt es daher

$$\frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13983816$$

Möglichkeiten. Und die Chance, die richtige Zahlenkombination zu erraten, ist recht „*unwahrscheinlich*“, nämlich 1:13 983 816.

Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten (Darstellung)

Um die Begriffe „wahrscheinlich“, „sehr wahrscheinlich“, „wenig wahrscheinlich“, „unwahrscheinlich“, „nicht wahrscheinlich“ o.ä., die in ihrer umgangssprachlichen Verwendung bekannt sind, zu präzisieren, werden zuerst Erfahrungen vermittelt mit einfachen Zufallsexperimenten wie „Lose ziehen“, „mit einem“ oder „mit zwei Würfeln werfen“, „Münzenwurf“, „Glücksrad drehen“. Die eingeführten Darstellungen unterstützen das Verständnis und helfen beim Aufbau des gewünschten Regelbewusstseins.

Grundbegriffe

- a) Du ziehst aus einem Gefäß mit den Kugeln 1, 2, 3, 4, 5, 6 eine Kugel. Wie groß ist die Chance, 6 zu ziehen?
- b) Du wirfst einen normalen Spielwürfel. Wie groß ist die Chance, 6 zu werfen?

In beiden Fällen ist die Gewinnchance 1:6, als Bruch geschrieben: $1/6$.

Verallgemeinerung (nach weiteren Versuchen): Die Gewinnchance nennt man die „*Wahrscheinlichkeit*“ des *Ereignisses* „6 ziehen“. In diesen Fällen ist einer von 6 Fällen „günstig“. Es handelt sich um den Bruch der „günstigen Fälle“ durch „alle möglichen Fälle“, kurz:

$$\text{Wahrscheinlichkeit} = \frac{\text{günstige Fälle}}{\text{mögliche Fälle}}$$

Kommentar

Da Lernende dazu neigen, die Gewinnchance als Verhältnis aus Gewinnmöglichkeiten gegen Nieten anzugeben, z.B. als „fifty – fifty“, ist es bei diesen einfachen Beispielen wichtig, von Anfang an die Gesamtheit aller Möglichkeiten als Bezugsgröße einzuführen, wie dies bei der Prozentrechnung der Fall ist. Dann bietet sich jedoch ein Gefäß mit 10 Kugeln an. Zieht man eine bestimmte Kugel, hat man die Gewinnchance 1 : 10, das ist 10% oder ein Zehntel.

Es ist unmöglich, mit einem Würfel bei einmaligem Werfen 10 zu erhalten. Es ist ein *unmögliches Ereignis* mit der Wahrscheinlichkeit 0; denn die Zahl der günstigen Ereignisse ist 0 bei 6 möglichen Ereignissen.

Dagegen ist es ganz sicher, mit einem Wurf eines Würfels eine Zahl zwischen 0 und 7 zu werfen. Es ist dies ein *sicheres Ereignis* mit der Wahrscheinlichkeit 1; denn es gibt 6 günstige Fälle und 6 mögliche Ausfälle.

Aufgabenserie

Weitere Aufgaben sichern diese Begriffsbildungen ab.

Aufgabe 1

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einmaligem Werfen mit einem Würfel eine „1“ zu werfen? / „eine gerade Zahl“ zu werfen? / „2 oder 5“ zu werfen?
- Gib andere Ereignisse an, die bei demselben Experiment auch die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ haben.
- Suche Ereignisse mit größerer / kleinerer Wahrscheinlichkeit als $\frac{1}{2}$.

Aufgabe 2

In einer Kiste liegen 36 Kugeln, 6 schwarze und 30 weiße.

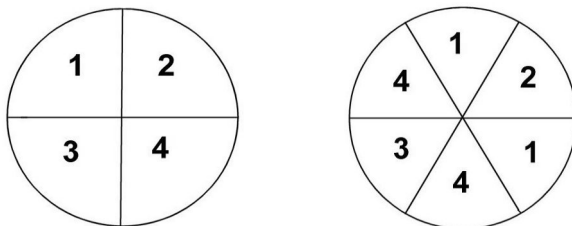
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim 1. Zug eine schwarze (weiße) Kugel zu ziehen?
- Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit für „schwarz ziehen“ („weiß ziehen“) beim 2. Zug, wenn die zuerst gezogene Kugel nicht in die Kiste zurückgelegt wird?
- Beobachte in jedem der Fälle den Zusammenhang zwischen den Ereignissen „schwarz ziehen“ und „weiß ziehen“. (Hinweis: Addiere diese beiden Wahrscheinlichkeiten.)

Aufgabe 3

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Münzenwurf das Ereignis „Zahl liegt oben“ zu erhalten? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit zweimaligem Werfen einer Münze jedes Mal „Zahl“ zu werfen?

Aufgabe 4

Zwei Glücksräder stehen zur Auswahl bereit:



- Bei jedem der Glücksräder erhält man auf die 4 einen Gewinn. Mit welchem Glücksrad würdest du dein Glück versuchen?
- Wie entscheidest du dich, wenn man den Gewinn auf die 1 (bzw. 2, bzw. 3) erhält?
- Wie entscheidest du dich, wenn man den Gewinn bei dem Ereignis „größer als 2“ erhält?

Die Erfahrungen aus den bisher bearbeiteten Aufgaben werden im nächsten Abschnitt an Hand von weiteren günstig ausgewählten Aufgaben präzisiert und als *Summenregel* und *Produktregel* formuliert.

Addition von Wahrscheinlichkeiten

Aufgabe 5

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei dem abgebildeten Glücksrad die folgenden Ereignisse eintreten:

E_1 : Eine ungerade Zahl treffen.

E_2 : Eine ungerade Zahl kleiner als 4 treffen.

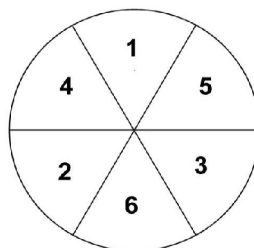
E_3 : Eine ungerade Zahl größer als 4 treffen.

E_4 : Eine gerade Zahl treffen.

E_5 : Eine Zahl größer als 4 treffen.

$E_6 = (E_2 \text{ oder } E_3)$ tritt ein.

$E_7 = (E_4 \text{ oder } E_5)$ tritt ein.



Kommentar

Eine Analyse der Ergebnisse zeigt, dass

$$W(E_6) = W(E_2) + W(E_3) = 2/6 + 1/6 = 1/2 = W(E_1).$$

Andererseits gilt aber nicht $W(E_7) = W(E_4) + W(E_5)$. Es ist $W(E_7) = 4/6$, und die Summe $W(E_4) + W(E_5)$ ergibt $5/6$. Dies ist um $1/6$ größer. $1/6$ ist aber gerade die Wahrscheinlichkeit des sowohl zu E_4 als auch zu E_5 gehörenden Ereignisses „6 treffen“.

Weitere Aufgaben verbreitern diese Erfahrungsbasis, so dass man verallgemeinernd feststellen kann:

Summenregel

Wenn zwei Ereignisse E und F *unvereinbar* sind, erhält man die Wahrscheinlichkeit für das neue Ereignis „E oder F“ durch Addition der Einzelwahrscheinlichkeiten. Es gilt also in diesem Falle

$$W(E \text{ oder } F) = W(E) + W(F)$$

Gibt es Ausfälle des Zufallsexperiments, die sowohl zu E als auch zu F gehören, d.h.: E und F sind *nicht unvereinbar*, muss man die Summe $W(E)+W(F)$ um die Wahrscheinlichkeiten der zu beiden, E und F, gehörenden Ausfälle verringern, um die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „E oder F“ zu erhalten.

Das Ereignis „ E_1 oder E_4 “ ist ein sicheres Ereignis, da man auf alle Fälle entweder eine gerade Zahl oder eine ungerade Zahl trifft. Also ist die Wahrscheinlichkeit $W(E_1 \text{ oder } E_4) = 1$. Dies ergibt sich auch als Summenwahrscheinlichkeit nach der obigen Regel als $W(E_1)+W(E_4) = 1/2+1/2$.

Die Ereignisse E_1 und E_4 sind nicht nur unvereinbar. Wenn E_1 nicht eintritt, dann trifft E_4 ein und umgekehrt. Man nennt daher E_4 das *Gegenereignis* von E_1 und E_1 ist das *Gegenereignis* von E_4 .

Bezeichnung des Ereignisses: E

Bezeichnung des Gegenereignisses: \bar{E}

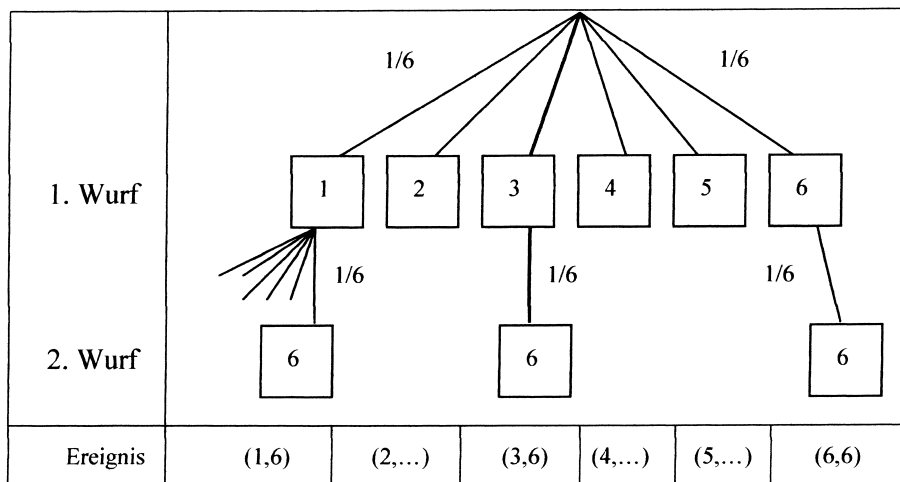
Es gilt $W(E) + W(\bar{E}) = 1$

Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten bei zweistufigen Zufallsexperimenten

Musterbeispiel für einen *zweistufigen* Zufallsversuch ist das zweimalige Werfen eines Spielwürfels. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei jedem der beiden Würfe 6 zu werfen?

Zur Beantwortung der Frage bieten sich 3 mögliche Darstellungen an.

1. Entscheidungsbaum



Kommentar

Nach den Vorerfahrungen mit den bisherigen Aufgaben erkennen die Schüler am *Entscheidungsbaum* die Herleitung der Produktregel. Zu jedem Ereignis des zweistufigen Versuches führt ein *Pfad* des Entscheidungsbaumes. Zu dem Ereignis (3,6) führt der fett gezeichnete Pfad. Das Ereignis, beim ersten Wurf 3 zu werfen, tritt mit der Wahrscheinlichkeit $1/6$ ein. Beim 2. Wurf ist die Einzelwahrscheinlichkeit, 6 zu werfen, wieder $1/6$. Mit Beachtung des ersten Wurfes und seiner Wahrscheinlichkeit ist das $1/36$ als „ $1/6$ von $1/6$ “. Man nennt die Wahrscheinlichkeit entlang eines solchen Pfades die *Pfadwahrscheinlichkeit*.

In der Zusammenfassung erhält man die Produktregel

Produktregel für 2-stufige Versuche

Die Pfadwahrscheinlichkeit für ein Ereignis eines zweistufigen Versuches erhält man durch Multiplikation der Einzelwahrscheinlichkeiten der voneinander unabhängigen Ereignisse entlang des Pfades.

2. Tabelle mit 2 Eingängen

| 2. Wurf | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1. Wurf | | | | | | |
| 1 | 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 | 1,6 |
| 2 | 2,1 | 2,2 | 2,3 | 2,4 | 2,5 | 2,6 |
| 3 | 3,1 | 3,2 | 3,3 | 3,4 | 3,5 | 3,6 |
| 4 | 4,1 | 4,2 | 4,3 | 4,4 | 4,5 | 4,6 |
| 5 | 5,1 | 5,2 | 5,3 | 5,4 | 5,5 | 5,6 |
| 6 | 6,1 | 6,2 | 6,3 | 6,4 | 6,5 | 6,6 |

3. Liste (im Rechteckfeld)

(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)
 (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)
 (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)
 (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)
 (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)
 (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)

Kommentar

Bei der 2. und 3. Darstellung erhält man die Gesamtzahl aller Ausfälle des zweimaligen Werfens eines Würfels in einer zweidimensionalen Anordnung. Eine räumliche Darstellung bei einer Verallgemeinerung zum mehrstufigen Versuch mit mehr als 2 Stufen ist nicht mehr übersichtlich (bei 3 Stufen) bzw. unmöglich (bei mehr als 3 Stufen). In diesen Fällen bleibt der Entscheidungsbaum als nützliche Lösungshilfe.

Der folgende Abschnitt bietet weitere Aufgaben an, die der Sicherung und Erweiterung der Schülerkompetenzen dienen. Sachliche Vertiefung lässt sich erreichen, wenn nun auch mehrstufige Abläufe mit mehr als zwei Stufen untersucht werden.

Aufgabenserie**Aufgabe 1**

Zweimal würfeln: Welches sind die Pfadwahrscheinlichkeiten für diese Ereignisse?

- Welches Ereignis hat die größere Wahrscheinlichkeit, „mit 2 Würfeln eines Würfels jedes Mal 6“ werfen oder „mit einem Wurf eines Würfels 6“ werfen“?

- b) Welches Ereignis hat die größere Wahrscheinlichkeit, „mit 2 Würfeln eines Würfels jedes Mal keine 6“ werfen, oder „mit einem Wurf eines Würfels keine 6“ werfen?
- c) 1. Wurf: „ungerade Zahl“; 2. Wurf: „6“. Suche andere zweistufige Ereignisse mit derselben Wahrscheinlichkeit.

Aufgabe 2

Zweimal Münzenwurf: Wie groß ist jeweils die Pfadwahrscheinlichkeit?

- a) Jedes Mal „Zahl“ werfen.
- b) Zuerst „Zahl“, dann „Kopf“ werfen.
- c) „Einmal Zahl“ und „einmal Kopf“ werfen.

Aufgabe 3

Zehnmal Münzenwurf: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für:

- a) „Es erscheint jedes Mal Zahl“?
- b) „Es erscheint nie Zahl“?

Aufgabe 4

Eine Münze wird dreimal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit?

- a) „Nie erscheint Zahl“.
- b) „Mindestens bei einem Wurf erscheint Zahl“.
- c) „Bei genau einem Wurf erscheint Zahl“.
- d) „Bei genau zwei Würfeln erscheint Zahl“.
- e) „Bei allen drei Würfeln erscheint Zahl“.

Aufgabe 5

Dreimal mit einem Würfel werfen.

- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, jedes Mal eine andere Augenzahl zu werfen?
- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zweimal oder dreimal (d.h. „mindestens zweimal“) dieselbe Augenzahl zu werfen?

Aufgabe 6

Wie groß ist jedes Mal die Wahrscheinlichkeit?

- a) Bei 4 Würfeln mit *einem Würfel* mindestens *eine 6* zu werfen.
- b) Bei 24 Würfeln mit *zwei Würfeln* mindestens *eine Doppelsechs* zu werfen.

Aufgabe 6 ist als Problem des Chevalier de Méré berühmt geworden: Chevalier de Méré lebte als Philosoph und Literat am Hofe Ludwigs XIV. Er wandte sich im Jahre 1654 mit folgendem Problem an den bekannten Mathematiker Blaise Pascal. Was ist wahrscheinlicher, der Versuch a) oder der Versuch b) der obigen Aufgabe.

Der Chevalier hielt die beiden Regeln für gleichwertig; seine Lösung:

Regel a): 4 Würfe, jeder Wurf hat 6 mögliche Ausfälle –
Verhältnis 4 : 6.

Regel b): 24 Würfe, jeder Wurf hat 36 mögliche Ausfälle –
Verhältnis 24 : 36 = 4 : 6

Diese Lösung ist falsch, denn es sind dies nicht die Verhältnisse der günstigen zu den möglichen Fällen und auch nicht die Pfadwahrscheinlichkeiten.

Lösung zu a)

Das Gegenereignis ist „bei keinem Wurf 6 werfen“. Es ist dies ein 4-stufiger Versuch. Bei jedem Wurf beträgt die Wahrscheinlichkeit, „nicht 6 zu werfen“, $5/6$. Die Pfadwahrscheinlichkeit für „4 Würfe – keine 6“ ist also

$$\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}.$$

Das Ereignis „4 Würfe – mindestens einmal 6 werfen“ hat als Gegenereignis davon die Wahrscheinlichkeit

$$1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296} \approx 0,5177.$$

Lösung zu b)

Das Gegenereignis ist „bei keinem Wurf Doppelsechs werfen“. Es ist dies ein 24-stufiger Versuch. Bei jedem Wurf beträgt die Wahrscheinlichkeit „nicht Doppelsechs zu werfen“, $35/36$. Die Pfadwahrscheinlichkeit für „24 Würfe – keine Doppelsechs“ ist also

$$\left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0,5086.$$

Das Ereignis „24 Würfe – mindestens einmal Doppelsechs werfen“ hat als Gegenereignis davon die Wahrscheinlichkeit

$$1 - 0,5086 \approx 0,4914.$$

Der Versuch (a) hat die größere Wahrscheinlichkeit. Es ist wahrscheinlich, dass mehr als die Hälfte vieler Versuche – wenn auch nur wenige mehr – mindestens eine 6 zeigen. Bei (b) ist es wahrscheinlich, dass weniger als die Hälfte vieler Versuche eine Doppelsechs bringen.

Weitere Zufallsversuche und Aufgaben könnten nun folgen, um den Zusammenhang zwischen *relativer Häufigkeit* und *Wahrscheinlichkeit* bei einer großen Zahl von Versuchen zu erkunden.

Anmerkungen

- ¹ Vgl. Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg (2004 c) S. 5.
- ² Vgl. Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg (2004 c).
- ³ Vgl. Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg (2004 b).
- ⁴ Vgl. Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg (2004 a).
- ⁵ Vgl. z.B. Engel/Varga/Walser (1974) oder Glaymann/Varga 1975.
- ⁶ Wie Anmerkung 4.

Literatur

- Abele, A. (1977 a). *Ziel Mathematikunterricht. Einführung in die Statistik. Studienmappe 15*. Frankfurt am Main.
- Abele, A. (1977 b). *Ziel Mathematikunterricht. Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Kombinatorik. Studienmappe 16*. Frankfurt am Main.
- Bentzinger, W./Hofsäß, G. (Hrsg.) (1993). *Kurs Mathematik 10*. Frankfurt am Main.
- Engel, A. (1983/1972). *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik* (2 Bde.). Stuttgart.
- Engel, A./Varga, T./Walser, W. (1974). *Zufall oder Strategie. Spiele zur Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung auf der Primarstufe*. Stuttgart.
- Glaymann, M./Varga, T. (1975). *Zwischen Unmöglich und Sicher*. Freiburg.
- Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg (Hrsg.) (2004 a). *Bildungsplan 2004 Grundschule*. Villingen-Schwenningen.
- Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg (Hrsg.) (2004 b). *Bildungsplan 2004 Hauptschule*. Villingen-Schwenningen.
- Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg (Hrsg.) (2004 c). *Bildungsplan 2004 Realschule*. Villingen-Schwenningen.

Jens Holger Lorenz
Pädagogische Hochschule Heidelberg

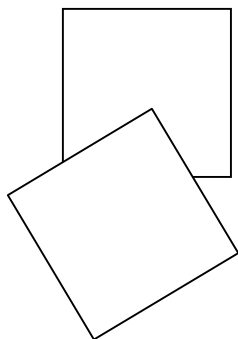
Symmetrie – Entwicklung einer mathematischen Idee über dreizehn Schuljahre

Summary

The powerful concept of symmetry is analyzed in its various forms as it appears in everyday life, architecture, art, music, and nature. The activities conducted by schoolchildren of different ages are outlined to help foster this concept. The focus is on the development of a net of interrelated ideas from arithmetic, geometry, natural and social sciences which are all connected to symmetry as a broad heuristic of human thinking.

1 Symmetrie „sehen“

Die bewusst offene Frage an die Schüler einer 7. Klasse: „Wie viel der Fläche des hinteren Quadrats werden von dem vorderen Quadrat verdeckt, wie ändert sich die Fläche bei Drehung des vorderen Quadrats und wann ist die überdeckte Fläche am größten?“ Während einige Schüler nur nachdenklich



dreinschauen, sieht mich ein Schüler verwundert an. „Was soll das?“, sagt sein Blick und als ich ihn frage, bemerkt er trocken, „Die Fläche ist immer gleich, ich brauche ja nur die Seiten zu verlängern, dann sehe ich doch, dass es immer ein Viertel ist.“ Was sieht dieser Schüler wohl, was andere nicht sehen? Was ist die Heuristik hinter seinem schnellen Problemlöseprozess?

Es ist die Symmetrie, die den Schüler „sehen“ lässt, allerdings war die Symmetrie nicht sichtbar, sie musste von ihm in der Vorstellung erzeugt werden. Die Frage, die im Folgenden behandelt werden soll, ohne sie letztlich abschließend zu beantworten, ist: Wie kann Schule helfen, dass Schüler

diesen kraftvollen, verallgemeinerten, übertragbaren Begriff der Symmetrie entwickeln, der sich als durchdringendes Konzept in vielen Aspekten des Lebens, der Natur und der Kunst wieder findet? Welche Inhalte lassen sich im Laufe der Schulzeit behandeln, um diese Kernidee in ihrem Facettenreichtum entstehen und als Heuristik wirksam werden zu lassen?

2 Symmetrie in der Grundschule

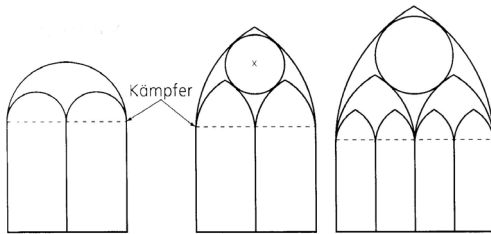
Die Behandlung der Symmetrie in der Grundschule beschränkt sich meist auf die Geometrie und dort auf die schlichte Achsensymmetrie. Diese Beschränkung kann einer Erweiterung und Vernetzung mit anderen Ideen und Erfahrungen durchaus im Wege stehen. Sicher ist es für Kinder interessant, Klecksfiguren zu erstellen und deren Symmetrie zu beobachten, oder ihre eigenen Bilder von Schmetterlingen zu untersuchen. Meist werden aber lediglich „abstrakte“ symmetrische geometrische Figuren untersucht, weniger hingegen Gegenstände des Alltags. Wichtiger erscheint, bereits in der Grundschule die Fragen zu behandeln,

- Warum sind Lebewesen symmetrisch?
- Warum sind die meisten technischen Objekte (Autos, Züge, Flugzeuge) symmetrisch?
- Und wie verläuft die Symmetrieebene? Warum ist sie parallel zur Bewegungsrichtung?
- Was passiert mit einem nicht-symmetrischen Flugzeug?
- Bastelt einen Papierflieger (diese fallen immer symmetrisch aus).
- Was passiert mit einem Papierflieger, der nicht-symmetrisch ist? Kann das günstig sein? (Ja, fliegt länger im Klassenzimmer, weil er Bögen fliegt.)

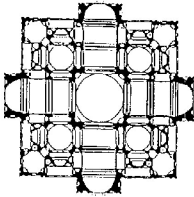
Die Achsensymmetrie wird erweitert zur Rotationssymmetrie und Translationssymmetrie. Dass diese begrifflich zusammenhängen, wird in der Regel leider nicht thematisiert. Es werden diverse Aktivitäten durchgeführt wie Weihnachtssterne basteln (Drehsymmetrie) und Bandornamente als Verzierung erstellen (Verschiebung), selten hingegen werden Blumen untersucht, die eine fünf-, sechs-, sieben-, zehn-, zwölf- oder dreizehnfache Drehsymmetrie besitzen. Natürlich sollten die biologischen Gegebenheiten, die zu diesen Mustern führen, nicht behandelt werden, dies ist den höheren Klassen vorbehalten. Wenn wir einen Apfel quer durchschneiden, welche Symmetrie besitzt der Kern (eine fünffache)? Wo können solche Symmetrien noch beobachtet werden? Aber es ist wichtig, im Sinne eines Spiralcurriculums die Ideen frühzeitig zu entwickeln.

3 Symmetrien in der Kunst

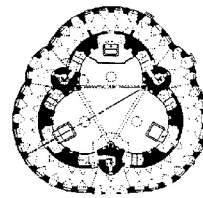
Der Umgang mit dem Zirkel erweitert die ästhetische Darstellungsmöglichkeit in Klasse 3. Die freie Gestaltung bietet Raum für Erprobungen, insbesondere für den Zusammenhang zwischen Kreis und regelmäßigem Sechseck. Die anschließende Analyse eröffnet die Möglichkeit, Maßwerke zu



erstellen und dabei Wiederholungen vorzunehmen. Die Wiederholungen in unterschiedlicher Größe sind eine weitere Verallgemeinerung der Symmetrie. Kinder finden solche Regelmäßigkeiten nicht nur an Bauwerken sondern auch auf Abbildungen wie den Geldscheinen. Die Konstruktion solcher Maßwerke stellt aber die Hauptaktivität dar (s. Abb., Schulwerk Mathematikus Bd. 4, 66).



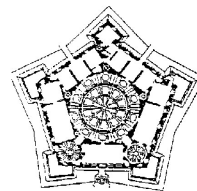
St. Peterskirche in Rom
(von Bramante, 1444–1514)



Wallfahrtskirche der Heiligsten Dreifaltigkeit bei Waldsassen
(Dientzenhofer, 1643–1689)



Schloss Stern bei Prag



Schloss Caprarola
(da Vignola, 1507–1573)

Kinder in den höheren Klassen der Grundschule analysieren Grundrisse von Burgen, Schlössern und Kirchen (s. Abb., Schulwerk Mathematikus Bd. 4, 121) und verbinden die entdeckten Regelmäßigkeiten mit schon bekannten (das Kerngehäuse des Apfels oder der Seestern mit dem Grundriss von

Schloss Caprarola, sechsblättrige Blumen mit dem Schloss Stern). Die unterschiedlichen Symmetrieeigenschaften lassen Vermutungen über die symbolträchtige Bedeutung der Muster zu. Ab wann wurden Kirchen gebaut mit einer Drehsymmetrie? Der Kunstunterricht der weiterführenden Schulen wird darüber Aufschluss geben. Die klassische Achsensymmetrie der mittelalterlichen Kirchen und Kathedralen (warum haben sie die Proportionen des menschlichen Körpers?) weichen in Renaissance und Barock einer Symmetrie, die den Altar in das Zentrum stellt. Welche sozialen Umbrüche zu der veränderten Sicht und den Auswirkungen auf die Architektur geführt haben, wird später behandelt werden.

Die Verbindung zwischen Mathematik und Kunst ist für Grundschulkinder ein lohnender Untersuchungsgegenstand. Das Prinzip der Symmetrie kann in fächerübergreifenden Unterrichtseinheiten studiert werden:

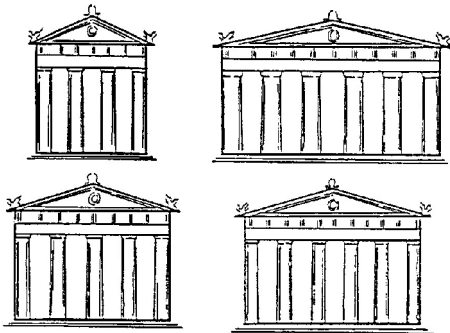
- Welche Symmetrien sind an den Bildern von Mondrian, Escher, Klee oder Vasarely feststellbar?
- Wie hat Raffael das Symmetrieproblem an der „Schule von Athen“ gelöst?

Solche Fragen führen von der Kunst zu den mathematischen Gesetzmäßigkeiten der Parkettierungen. Schon die Gestaltung einer Fassade, etwa des Konservatorenpalastes von Michelangelo, führt auf die Frage der passenden Parkettsteine.

- Welche regelmäßigen Parkettsteine (regelmäßige n -Ecke) sind möglich? Diese Frage lässt sich auch ohne Betrachtung der Winkel im n -Eck experimentell von Kindern beantworten. Sie führt auf die regulären Parkette, deren Symmetrien untersucht werden können.
- Welche Parkettsteine kann ich hinzunehmen, um mit zwei (drei) verschiedenen Steinen Parkette zu konstruieren? Dies führt auf die halbregulären Parkette.
- Wie ändert sich das Parkett, wenn ich den Parkettstein etwas abändere? Mit der Untersuchung dieser Frage kommen die Kinder dank geeigneter Techniken zu Escher-ähnlichen Parketten.
- Und für die Schüler der weiterführenden Schulen: Lässt sich die Idee von den Parketten von der Ebene auf den Raum übertragen? Warum leben wir in quaderförmigen Räumen?

Die Idee der Symmetrie führt bei den ästhetischen Betrachtungen notwendig auf Proportionen. Welche Seitenverhältnisse empfinden wir als angenehm, welche gefallen uns weniger gut. Die freie Gestaltung wird eher als Wettstreit aufgefasst, das eigene Produkt ist immer das schönste. Gibt es mathematische Kriterien? Es kann in den unteren Klassen nicht Ziel sein, irrationale Zahlen einzuführen, insofern ist der Goldene Schnitt nicht Unterrichtsgegenstand. Aber die auf Grund der Erfahrungen mit Zahlenfolgen bekannten Fibonacci-Zahlen führen zu einer vorläufigen Beantwortung. Die Analyse von Bauten (s. Abb., Schulwerk Mathematiker Bd. 4, 121) zeigt,

dass die Gebäude dann als ästhetisch empfunden werden, wenn sie den Verhältnissen der Fibonacci-Zahlen genügen (da dieser Quotient bekanntlich gegen den Goldenen Schnitt konvergiert). Verschiedene Versuche mit diesen Seitenverhältnissen erweisen sich im Unterricht als höchst überraschend. In höheren Klassen der Sekundarstufe I werden dann Palladio-Bauten auf ihre Proportionen untersucht und der Zusammenhang mit den altgriechischen (pythagoräischen) Vorstellungen hergestellt.



4 Symmetrien in der Musik

Die Idee, die hinter den alltäglichen Gegebenheiten aufscheint, ist das wesentliche im Lernprozess. Ideen werden allerdings nicht von selbst erkannt, sondern die Bezüge müssen hergestellt werden, die Verbindung, die Ähnlichkeit ist im Unterricht zu thematisieren.

Ein Bandornament ist eine geometrische Form, ein Kanon eine musikalische. Sie sind verknüpft über die gemeinsame Idee der Translation. Die Verschiebung führt das Bandornament in sich über, die Melodie wird zeitversetzt wiederholt. Hierbei die Strukturgleichheit zu erkennen, eröffnet weitergehende Untersuchungen.

Die Barockmusik war reich an Einfällen, mathematische Strukturen, die sich in der geometrischen Form als ästhetisch erwiesen haben, auf die Tonsetzung zu übertragen. Nicht nur die Translationssymmetrie, die sich in der Fuge und im Kanon als populärer Form wieder findet, wurde verwendet, sondern auch Spiegelungen. Der Krebs, von Bach zur Perfektion gebracht, lässt eine Melodie rückwärts verlaufen. In dem Beispiel der Abbildung wurde von Haydn in dem Menuett aus der Klaviersonate Nr. 41, Hob. Xvi/26, diese Palindromform verwendet. Die Tücke, die auch Schülern sofort auffällt, liegt in der unterschiedlichen Beschaffenheit der menschlichen Sinnesorgane. Das Auge erkennt ohne Mühe die Spiegelung und entdeckt sie auch auf dem Notenblatt. Das Ohr hingegen sperrt sich gegen diese Erkenntnis, es ist auf sequentielle Abfolgen ausgerichtet.



Im Barock wurde aus dieser Form der mathematisch-musikalischen Verbindung ein Spiel: Sänger standen sich gegenüber und sangen vom gleichen Notenblatt. Diese Variante des symmetrischen Komponierens ist über die Jahre erhalten geblieben, wie das Beispiel von Hindemiths „ludus tonalis“ zeigt. Die Drehsymmetrie: ist leicht erkennbar, wenn man die zweite Zeile auf den Kopf stellt (die nachstehende Abbildung zeigt Anfang und Ende des ludus tonalis; dazwischen liegt allerdings eine Stunde Musik!).



Die Spiegelsymmetrie ist keineswegs auf die vertikale Achse beschränkt, wie sie im Krebs bei Bach oder in der obigen Haydn-Sonate verwendet wurde. Die horizontale Achse kann bei mehrstimmigen Kompositionen ebenso dienen (Umkehrung). Wolfgang Amadeus Mozart machte bei seinem Klarinetten-quintett, KV 381, am Beginn des 1. Satzes davon Gebrauch. Und natürlich lassen sich beide Spiegelungen verbinden, was zur „Krebsumkehr“ führt. In extensiver Weise haben die Zwölftöner von der geometrischen Kompo-sitionsform Gebrauch gemacht und direkt symmetrische Muster entworfen, die in die zwölf Halbtonschritte übersetzt wurden. Leider kann unser Ohr diese Symmetrie nicht leicht erkennen (wenn überhaupt). Trotzdem können in den oberen Klassen der Sekundarstufen I und II diese Kompositionen analysiert werden (vgl. Fauvel/Flood/Wilson 2003).



5 Symmetrien in der Arithmetik

Bereits im Grundschulalter lassen sich eine Fülle von Übungen und Entdeckungen mit „Spiegelzahlen“ machen. In Klasse 2 führt die Addition bzw. Subtraktion von zweistelligen Zahlen und ihrer gespiegelten Zahl (53 ± 35) zur Entdeckung, dass die Ergebnisse immer aus der 11er- bzw. 9er-Reihe stammen. Eine Erklärung ist allerdings nur rudimentär möglich und wird späteren Klassen vorbehalten, es führt aber zu Einsichten in unser Dezimalsystem. In den Klassen 4-7 wird im Zusammenhang der Teilbarkeit untersucht werden können, warum die Palindromzahlen mit gerader Anzahl immer durch 11 teilbar sind. Sehr viel später kann untersucht werden, wie sich diese Eigenschaft auf Darstellungen in anderen Zahlssystemen überträgt.

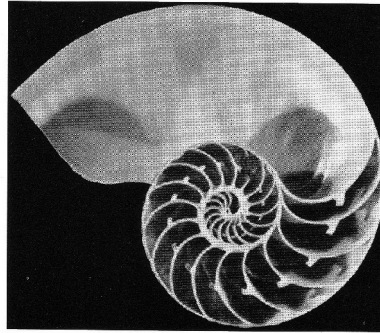
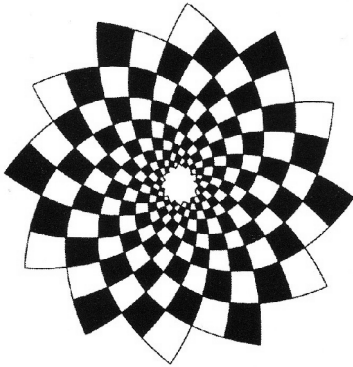
Die Untersuchung von Spiegelzahlen wird bei der Einführung der schriftlichen Multiplikation schon in Klasse 3 möglich: $1 \times 1 = 1$, $11 \times 11 = 121$, $111 \times 111 = 12321$, $1111 \times 1111 = 1234321$ etc. Geht es immer so weiter? Lässt sich im Voraus sagen, was die Wurzel (dieser Begriff wird nicht verwendet!) aus 12345654321 ist? Die Argumentation ist bei Grundschulern eine geometrische: Die schriftliche Multiplikation besitzt eine „Spiegelachse“. Diese Verallgemeinerung des „Spiegelns“ finden Kinder hingegen selbstverständlich, wenn es sich um Worte oder Sätze handelt: ANNA, OTTO oder das bekannte „Ein Neger mit Gazelle zagt im Regen nie“ bringen Glanz in das Kinderauge. Die Erkenntnis, dass eine bekannte Form in neuem Gewand auftaucht, lässt das Herz höher schlagen.

In Klasse 5 wird untersucht, ob sich die in Klasse 2 gefundene Gesetzmäßigkeit der Addition mit zweistelligen Spiegelzahlen verallgemeinern lässt. Was passiert, wenn eine Zahl mit ihrer Spiegelzahl addiert wird und dieser Prozess immer wieder fortgeführt wird? Mit der Startzahl 1943 ergibt sich: $1943 + 3491 = 5434$, dann $5434 + 4345 = 9779$, und schon erhalten wir eine Palindromzahl. Gelingt dies immer nach endlich vielen Schritten? Dieses zahlentheoretische Problem ist noch nicht gelöst, es wird vermutet, dass die Ausgangszahl 196 zu keiner palindromischen Zahl führt (Walser 1998, 94).

Und wie ist es mit „Translationszahlen“ der Form $abcabc$. In den Klassen 4-6 lassen sich diese im Zusammenhang der schriftlichen Division und der Teilbarkeitsregeln untersuchen. Dass die Zahlen bei Division durch die „krummen“ Zahlen 7, 11 und 13 keinen Rest lassen, ist für die Schüler an-

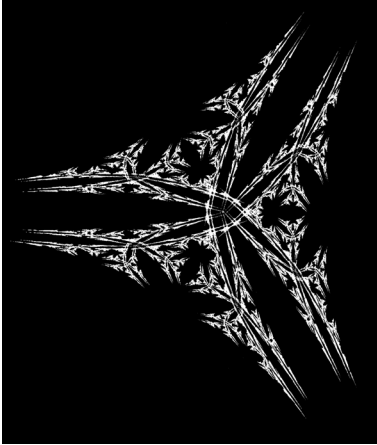
fangs überraschend, führt aber zu tieferen Einsichten in die Konstruktion von Zahlen (hier als Multiplikation mit 1001, der großen arabischen Glückszahl, die eben aus den kleinen Glückszahlen 7, 11 und 13 besteht; die kulturellen Unterschiede in der emotionalen Bedeutung von Zahlen als Glücks- oder Unglückszahlen wäre ein weiteres Untersuchungsfeld für einen fächerübergreifenden Unterricht).

Der Unterricht beschränkt sich in der Regel auf die Achsen-, Translations- und Drehsymmetrie. Der ursprüngliche Begriff ist allerdings allgemeiner gefasst. Das griechische Wort „Symmetrie“ bedeutete ursprünglich „Zusammenhang der Maßverhältnisse“ und bezeichnete bei Vitruv und danach die Wiederkehr von Proportionen und geometrischen Formen in einem Bau- oder Kunstwerk, insbesondere die Wiederholung globaler Proportionen im Kleinen. Die Beschränkung auf den mathematisch engen Begriff, der die Deckungsgleichheit beinhaltet, entstand erst im 19. Jh. (vgl. Kadeřávek 1992, 88).



Es wäre eine sträfliche Unterlassung, nicht auch die Ähnlichkeitsabbildungen unter den Symmetriebegriff zu fassen. Die Proportionen bleiben erhalten, und diese Form gibt sowohl in ästhetischer als auch in mathematischer Hinsicht reichlich Ansatzpunkte für den Unterricht der oberen Klassen und der Leistungskurse der Sekundarstufe II. Insbesondere eignen sich Spiralen und spirale Ähnlichkeitssymmetrien (vgl. die Abbildungen, oben links die allgemeine Struktur, oben rechts die Schale des Nautilus [Darvas 2007]). Diese Form ist insbesondere bei Wachstumsprozessen zu beobachten. Diese Ähnlichkeits-symmetrien führen in der weiteren, fortgeschrittenen Beschäftigung auf Fraktale, die sich allerdings für die Beschäftigung in der allgemeinbildenden Schule lediglich im Leistungskurs eignen. Bei den Fraktalen stößt man auf die gleichen Symmetrien, die schon in der Grundschule thematisiert wurden. (Das abgebildete symmetrische Fraktal wurde gebildet aus einer affinen Abbildung mit den Koeffizienten $a_{11}=-0,1$; $a_{12}=0,35$; $a_{21}=0,2$; $a_{22}=0,5$, und einer Translation mit den Koeffizienten $b_1=0,5$ und $b_2=0,4$; das symmetrische Fraktal wird gebildet durch willkürliche Wahl von Elementen aus der D_3 ; vgl. Field/Golubitsky 1992, 177, 196). Für Schüler scheint diese Verallgemeinerung des Symmetriebegriffs anfangs unzulässig,

ist sie doch weit entfernt von ihrer prototypischen Vorstellung der (Spiegel-)Kongruenz. Doch erweist sich diese sog. „dynamische Symmetrie“ (Hambridge 1919; vgl. auch Darvas 2007; Emmer 1993) als fruchtbar und weitreichend.



6 Fazit

Symmetrie ist ein Konzept, das mehr ist als das Spiegeln an einer Achse und die Beschäftigung mit Zirkel und Lineal im Geometrieunterricht. Symmetrie ist eine Weise, Begriffe und Erfahrungen mit einander zu verbinden, Analogien und Ähnlichkeiten zu suchen und damit neue Einsichten zu gewinnen. Mathematikunterricht hat die Aufgabe, Schüler in dieser Heuristik zu bestärken, ihnen Anlässe zu geben, Symmetrien in vielfältigen Situationen zu begegnen. Es gibt genügend Anlässe, mathematische Ideen nicht nur in ihrer symbolischen Form darzustellen, sondern ihren symmetrischen Gehalt sichtbar werden zu lassen. So kann das Prinzip des gegenseitigen Veränderns für die Addition auf der enaktiven Ebene durch Umdrehen von Wendewürfeln oder -plättchen vollzogen werden, und es kann alternativ durch eine ziffermäßige Schreibweise dargestellt werden ($11+11=22$, $12+10=22$, $13+9=22$, ...). Die untenstehende bildhafte Darstellung, die während eines Erkenntnisprozesses und parallel zu diesem von einem 6-Jährigen erstellt wurde, macht die Kraft des Symmetriebegriffs deutlich. Die Symmetrie weist über diesen hier untersuchten Spezialfall hinaus, sie ist erweiterbar, generalisierbar. Der 6-Jährige erlebt mit seiner zeichnerischen Konstruktion eines arithmetischen Sachverhalts eine neue Dimension der Erkenntnis.



Literatur

- Darvas, G. (2007). *Symmetrie*. Basel: Birkhäuser.
- Emmer, M. (1993). *The visual mind – Art and mathematics*. Cambridge: MIT Press.
- Fauvel, J./Flood, R./Wilson, R. (Hrsg.) (2003). *Music and mathematics – From Pythagoras to fractals*. Oxford: University Press.
- Field, M./Golubitsky, M. (1992). *Symmetry in chaos*. Oxford: University Press.
- Ghyka, M. (1977). *The geometry of art and life*. New York: Dover.
- Hambridge, J. (1919). *The elements of dynamic symmetry*. Cambridge: Yale University Press (Wiederabdruck 1967 von Dover).
- Hofmann, W. (1973). *Goldener Schnitt und Komposition – Versuch zur Fixierung eines Ordnungsprinzips*. Wilhelmshaven: Heinrichshofen.
- Ivins, W.M. (1946). *Art & geometry – A study in space intuitions*. New York: Dover.
- Kadefávek, F. (1992). *Geometrie und Kunst in früherer Zeit*. Stuttgart: Teubner.
- Mazzola, G. (1986). *Symmetrie in Kunst, Natur und Wissenschaft* (Katalogbände 1-3 der Ausstellung, Mathildenhöhe 1.06.-24.08.1986). Darmstadt: Roether.
- Stewart, I./Golubitsky, M. (1993). *Denkt Gott symmetrisch? Das Ebenmaß in Mathematik und Natur*. Basel: Birkhäuser.
- Tarassow, L. (1999). *Symmetrie, Symmetrie! – Strukturprinzipien in Natur und Technik*. Heidelberg: Spektrum.
- Walser, H. (1998). *Symmetrie*. Stuttgart: Teubner.

Volker Ulm
Universität Augsburg

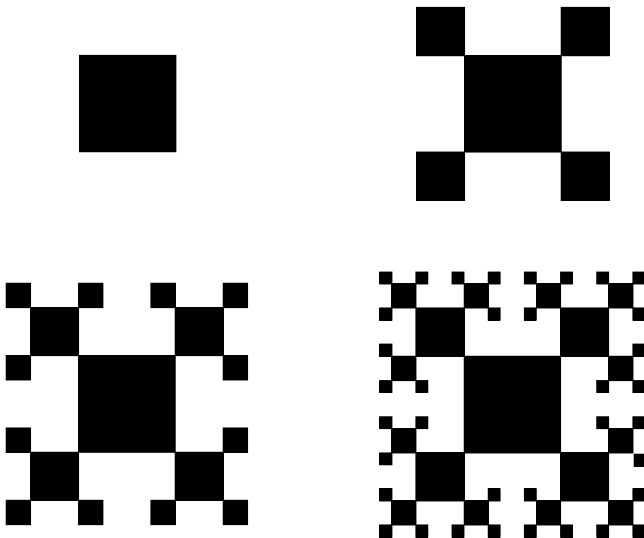
Im Unscheinbaren Tiefe entdecken – Von Quadraten zu Cauchy-Folgen in metrischen Räumen

Summary

Patterns of squares which at first glance seem to be quite inconspicuous bear substantial mathematical depth. They invite to raise questions, to explore and to vary the mathematical situation, and to study infinite processes. When thinking about infinity one is lead to Cauchy sequences in metric spaces of non-empty compact subsets of \mathbb{R}^n .

1 Ein Bild aus einem Schulbuch

Im Schulbuch „mathbu.ch 9+“ (Affolter u. a. 2004, 69) findet sich das folgende, auf den ersten Blick unscheinbare Bild:



Schon beim ersten Betrachten laden diese Muster zu mathematischem Nachdenken, zum Stellen von Fragen, zum Forschen, Probieren und Entdecken, kurz: zum Betreiben von Mathematik ein. In mehreren Klassen der 10. und 11. Jahrgangsstufe wurde dieses Bild anhand folgender Arbeitsaufträge bearbeitet:

- a) Überlege dir zu dieser Folge von Figuren möglichst vielfältige mathematische Fragestellungen und schreibe diese auf.
- b) Tausche deine Ideen mit deinen Nachbarn aus.
- c) Bearbeite mit deinen Nachbarn gemeinsam einige eurer Fragestellungen.
- d) Stellt gemeinsam eure Ideen und Ergebnisse in der Klasse vor.

Die Schüler waren dabei angehalten, ihr Heft im Sinne eines Lerntagebuchs zu nutzen und möglichst alle ihre Ideen und Gedanken, Wege und Irrwege in ihr Heft zu notieren. Die Analyse dieser Aufzeichnungen ermöglichte (teilweise) eine Rekonstruktion des Denkens und Arbeitens der Schüler. Die von den Schülern formulierten Fragen waren ausgesprochen breit gefächert. Die Reihung der folgenden Aufzählung spiegelt die Häufigkeit der genannten Aspekte wider:

- Zahl der Quadrate,
- Flächeninhalt der Muster,
- kleinstes Quadrat, das das n -te Muster einschließt,
- Überlappungen bzw. Berührungen im Muster,
- Umfang der Figuren,
- Verhalten der Folge der Flächeninhalte,
- kleinstes Quadrat, das alle Muster einschließt,
- Verhalten der Folge der Umfänge,
- Symmetrieeigenschaften,
- Flächenverschiebungen, so dass einfachere flächengleiche Figuren entstehen,
- Zahl der Eckpunkte,
- Computerprogramm zum Generieren der Muster.

Im Folgenden werden vor allem der mathematische Gehalt und die Tiefe dieser Muster diskutiert. Auf didaktische Aspekte zur Gestaltung von Unterricht und zur Konzeption von Lernumgebungen mit diesen Mustern wird entsprechend weniger eingegangen (vgl. hierzu Ulm 2007, Leuders/Ulm 2007).

2 Eine fast-geometrische Reihe

Betrachtet man bei den Quadratmustern für jede Figur der Folge etwa die Zahl der Quadrate, den Gesamtumfang oder die Gesamtfläche (siehe Abschnitt 4), so stößt man jeweils auf Reihen, die eine gemeinsame Struktur besitzen. Diese Struktur tritt auch bei verschiedenartigen Variationen der mathematischen Situation zu Tage (vgl. Abschnitt 5). Deshalb lohnt es sich, diese den Mustern zu Grunde liegende algebraische Kernstruktur zunächst allgemein zu untersuchen.

Seien $a, p, q \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Folge $(a_i)_{i \geq 0}$ mit $a_0 = a$, $a_1 = pa_0$ und $a_i = qa_{i-1}$ für alle $i \geq 2$ sowie die zugehörige Reihe $(G_n)_{n \geq 0}$ mit

$$G_n = \sum_{i=0}^n a_i \quad \text{für alle } n \geq 0.$$

Explizit ist $a_i = q^{i-1}pa$ für alle $i \geq 1$. Damit gewinnen wir eine explizite Darstellung von G_n für alle $n \geq 0$:

$$G_n = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i = a + \sum_{i=1}^n q^{i-1}pa = a + pa \sum_{i=0}^{n-1} q^i.$$

Ist $q = 1$, so ist

$$G_n = a + pan = a(1 + pn).$$

Im Fall $q \neq 1$ ist

$$G_n = a + pa \frac{1 - q^n}{1 - q} = a \frac{1 - q + p - pq^n}{1 - q}.$$

Die Reihe $(G_n)_{n \geq 0}$ konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$. In diesem Fall ist der Grenzwert

$$G_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} G_n = a \frac{1 - q + p}{1 - q}.$$

Wir formulieren dieses Ergebnis nun nochmals mit transformierten Variablen, indem wir $p = Nz$ und $q = (N - 1)z$ setzen. Dies wird die Anwendung des Resultats auf die Folge der Quadratmuster erleichtern.

Lemma

Seien $a, N, z \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Folge $(a_i)_{i \geq 0}$ mit $a_0 = a$, $a_1 = Nza_0$ und $a_i = (N - 1)za_{i-1}$ für alle $i \geq 2$ sowie die zugehörige Reihe $(G_n)_{n \geq 0}$ mit

$$G_n = \sum_{i=0}^n a_i \quad \text{für alle } n \geq 0.$$

G_n besitzt für $n \geq 0$ die explizite Darstellung

$$G_n = a(1 + Nzn) = a(1 + (z + 1)n) \quad , \text{ falls } (N - 1)z = 1, \text{ bzw.}$$

$$G_n = a \frac{1 + z - N(N - 1)^n z^{n+1}}{1 - (N - 1)z} \quad , \text{ falls } (N - 1)z \neq 1.$$

Die Reihe $(G_n)_{n \geq 0}$ konvergiert genau dann, wenn $|(N - 1)z| < 1$. In diesem Fall ist

$$G_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n = a \frac{1 + z}{1 - (N - 1)z}.$$

Beweis:

Anwendung des vorherigen Resultats mit $p = Nz$ und $q = (N-1)z$.

3 Grenzwerte von Folgen kompakter Mengen

Die Quadratmuster führen zu den Fragen, wie sich etwa die Folgen der Anzahl der Teilquadrate, der Umfänge oder der Flächeninhalte für immer größer werdende Indices entwickeln. Hier hat man es jeweils mit Folgen reeller Zahlen zu tun. Gleichzeitig verdichten sich aber auch intuitive Vorstellungen von einer „Grenzfigur“. Doch wie kann man solche Vorstellungen präzise fassen? Was ist eigentlich ein Grenzwert einer Folge geometrischer Muster? Welche Punkte gehören zur „Grenzfigur“? Wir stoßen damit auf das fundamentale Problem, zunächst zu definieren, was man unter einer „Grenzfigur“ einer Folge geometrischer Figuren verstehen möchte.

Diese Begriffsbildung werden wir in vollständigen metrischen Räumen vollziehen – weitere Spezifika des \mathbb{R}^2 werden nicht benötigt. Insbesondere werden wir ein Kriterium dafür gewinnen, wann ein Punkt zur Grenzfigur gehört und wann nicht.

Definitionen

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

- Es bezeichne $\mathcal{K}(X)$ die Menge aller nicht leeren, kompakten Teilmengen von X .
- Für alle $x \in X$ und $A \in \mathcal{K}(X)$ sei der Abstand des Punktes x von der Menge A

$$d(x, A) = \min_{a \in A} d(x, a) .$$
- Für $A, B \in \mathcal{K}(X)$ sei der Abstand der beiden Mengen
$$d(A, B) = \max\left\{ \max_{a \in A} d(a, B), \max_{b \in B} d(b, A) \right\} .$$

Diese Begriffe sind wohldefiniert, da die Mengen A bzw. B jeweils kompakt sind. Die Minima bzw. Maxima existieren also.

Mit d wird eine Metrik auf der Menge $\mathcal{K}(X)$ definiert, die sog. *Hausdorff-Metrik* (vgl. z.B. Barnsley 1988, 30 ff., Edgar 1990, 65 f., Falconer 1990, 114). Anschaulich gesprochen, haben zwei Mengen umso geringeren Hausdorff-Abstand, je besser sie einander wechselseitig überdecken. Im metrischen Raum $(\mathcal{K}(X), d)$ sind somit Begriffe wie „konvergente Folge“, „Cauchy-Folge“ oder „Grenzwert einer Folge“ definiert. Die Frage nach der Konvergenz von Cauchy-Folgen führt zur Frage nach der Vollständigkeit des Raumes $(\mathcal{K}(X), d)$:

Satz

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann gilt:

- a) Der metrische Raum $(\mathcal{K}(X), d)$ ist vollständig.
- b) Sei $(A_n)_{n \geq 0}$ eine Cauchy-Folge in $(\mathcal{K}(X), d)$. Dann ist der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \{ x \in X \mid \text{Es gibt eine Folge } (a_n)_{n \geq 0} \text{ mit } a_n \in A_n \text{ für alle } n \geq 0, \text{ die gegen } x \text{ konvergiert.} \}$.
- c) Sei $(A_n)_{n \geq 0}$ eine Cauchy-Folge in $(\mathcal{K}(X), d)$ mit $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots$. Dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n}.$$

(Dabei wird für jede Menge $B \subset X$ mit \overline{B} die abgeschlossene Hülle von B bezeichnet.)

Beweis:

Siehe (Barnsley 1988, 36 ff.) oder (Edgar 1990, 66 ff.).

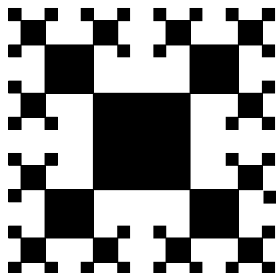
Mit dieser Begriffsbildung und dem Satz stehen die Fragen nach der Grenzfigur einer Folge geometrischer Figuren auf solidem Fundament. Betrachten wir $X = \mathbb{R}^2$ bzw. $X = \mathbb{R}^3$ mit der euklidischen Metrik, so haben wir eine tragfähige Grundlage nicht nur für die Folge der Quadratmuster, sondern auch für viele geometrische Grenzwertprozesse der Standardmathematik in der Sekundarstufe, die kaum problematisiert werden, da sie für Schülerinnen und Schülern leicht intuitiv erfassbar sind. Vier Beispiele:

- Beim Archimedischen Verfahren zur Bestimmung von Kreisflächen nähern sich ein- oder umbeschriebene Vielecke einem Kreis *immer mehr an*.
- Die Volumenformel für Zylinder oder Kegel kann gewonnen werden, indem man diese Körper mit Prismen bzw. Pyramiden *beliebig genau annähert*.
- Bei der Erarbeitung des Integralbegriffs werden krummlinig begrenzte Flächen durch Figuren aus Rechteckstreifen *immer mehr angenähert*.
- Das Volumen von Rotationskörpern kann man gewinnen, indem man die Körper mit aus Kreisscheibchen zusammengesetzten Körpern *beliebig genau annähert*.

Es werden also Folgen geometrischer Objekte betrachtet, um Ergebnisse über das geometrische Grenzobjekt zu gewinnen. Dabei liegt jeweils Konvergenz im oben beschriebenen Sinne im Raum der nicht leeren, kompakten Teilmengen des \mathbb{R}^2 bzw. des \mathbb{R}^3 vor.

4 Die Folge der Muster aus Quadraten

Wir beleuchten nun den mathematischen Hintergrund der in Abschnitt 1 abgebildeten Muster aus Quadraten.



Q_3

Wir gehen aus von einem Quadrat Q_0 , für dessen Seitenlänge wir ohne Einschränkung die Länge 1 annehmen, sowie einem positiven Parameter k . Das Bildungsgesetz der Folge $(Q_n)_{n \geq 0}$ ist rekursiv: Die Figur Q_n entsteht aus der Figur Q_{n-1} für $n \geq 1$, indem an alle Eckpunkte der Figur Q_{n-1} , an denen nicht zwei Quadrate zusammenstoßen, zusätzlich weitere Quadrate der Seitenlänge k^n – wie skizziert – angesetzt werden. (Dabei seien alle Quadrate bezüglich der Topologie abgeschlossen, sie enthalten also ihren Rand.)

4.1 Überlappungsfreiheit der Figuren

Im Weiteren werden wir nur solche Muster betrachten, bei denen sich keine Quadrate gegenseitig überlappen. Fordert man die Überlappungsfreiheit bei allen Mustern Q_n , so ist dies eine Forderung an den Parameter k .

Die Teilquadrate der Muster besitzen die Seitenlängen $1, k, k^2, k^3, \dots$. Alle Figuren Q_n sind also genau dann überlappungsfrei, wenn

$$\begin{aligned}
 & \forall n \geq 2: k^2 + k^3 + k^4 + \dots + k^n < \frac{1}{2} \\
 \Leftrightarrow & k^2 + k^3 + k^4 \dots \leq \frac{1}{2} \\
 \Leftrightarrow & k^2 \cdot (1 + k + k^2 + \dots) \leq \frac{1}{2} \\
 \Leftrightarrow & k^2 \cdot \frac{1}{1-k} \leq \frac{1}{2} \\
 \Leftrightarrow & (2k-1)(k+1) \leq 0 \\
 \Leftrightarrow & k \leq \frac{1}{2} \quad , \text{ da } k \text{ positiv.}
 \end{aligned}$$

Im Folgenden setzen wir stets $k \in]0; \frac{1}{2}]$ voraus. Damit ist die Überlappungsfreiheit aller Figuren gewährt.

4.2 Zahl der Quadrate

Jede Figur Q_n besteht aus Quadraten. Welches ist die kleinste Zahl Z_n an Quadraten, aus denen die n -te Figur zusammengesetzt ist ($n \geq 0$)?

Wir betrachten die ersten Muster und sehen direkt: $Z_0 = 1$, $Z_1 = 1 + 4$, $Z_2 = 1 + 4 + 4 \cdot 3$, $Z_3 = 1 + 4 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3^2$, ... Diese Reihe hat genau die in Abschnitt 2 untersuchte Struktur. Nach dem Lemma aus Abschnitt 2 mit $a = 1$, $N = 4$ und $z = 1$ ist somit die (kleinste) Zahl der Quadrate, aus denen die n -te Figur besteht,

$$Z_n = \frac{1 + 1 - 4 \cdot 3^n}{1 - 3} = 2 \cdot 3^n - 1.$$

Diese Folge $(Z_n)_{n \geq 0}$ der Zahl der Quadrate wächst also exponentiell mit der Basis 3.

4.3 Umfang der Figuren

Welchen Umfang besitzt die Figur Q_n ? Dazu wenden wir wieder das Lemma aus Abschnitt 2 an: Hier ist $a = 4$ der Umfang des Ausgangsquadrats, $N = 4$ die Eckenzahl der Quadrate und $z = k$ der Verkleinerungsfaktor für den Umfang. Der Gesamtumfang der n -ten Figur ($n \geq 0$) ist demnach

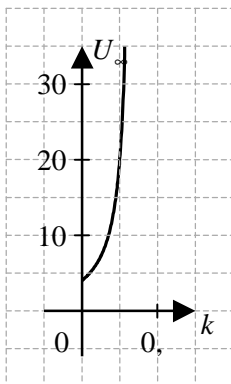
$$U_n = 4 \cdot (1 + \frac{4}{3}n) \quad , \text{ falls } k = \frac{1}{3}, \text{ bzw.}$$

$$U_n = 4 \cdot \frac{1 + k - 4 \cdot 3^n \cdot k^{n+1}}{1 - 3k} \quad , \text{ falls } k \neq \frac{1}{3}.$$

Diese Folge $(U_n)_{n \geq 0}$ der Umfänge konvergiert genau dann, wenn $k < \frac{1}{3}$.

In diesem Fall ist der Grenzwert $U_\infty = 4 \cdot \frac{1+k}{1-3k}$.

Die Abhängigkeit des Grenzwerts U_∞ vom Parameter k zeigt der unten abgebildete Graph. Er ist Teil einer Hyperbel mit einer senkrechten Asymptote bei der Abszisse $\frac{1}{3}$ und einer waagrechten Asymptote bei der Ordinate $-\frac{4}{3}$.



4.4 Flächeninhalt der Figuren

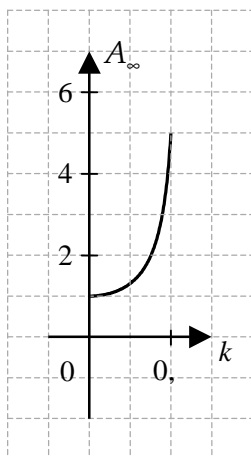
Wie groß ist der Flächeninhalt der Figur Q_n ? Auch hier liefert das Lemma aus Abschnitt 2 ein Resultat: Nun ist $a = 1$ der Flächeninhalt des Ausgangsquadrats, $N = 4$ die Eckenzahl der Quadrate und $z = k^2$ der Verkleinerungsfaktor für den Flächeninhalt. Die Gesamtfläche der n -ten Figur ($n \geq 0$) ist also

$$A_n = \frac{1 + k^2 - 4 \cdot 3^n \cdot k^{2n+2}}{1 - 3k^2}.$$

Diese Folge $(A_n)_{n \geq 0}$ konvergiert genau dann, wenn $3k^2 < 1$, wenn also $k < \sqrt{\frac{1}{3}} = 0,57\dots$. Da wir generell $k \leq \frac{1}{2}$ und damit Überlappungsfreiheit der einzelnen Figuren vorausgesetzt haben, konvergiert die Folge der Flächeninhalte stets gegen den Grenzwert

$$A_\infty = \frac{1 + k^2}{1 - 3k^2}.$$

Der folgende Graph zeigt die Funktion $A_\infty(k)$ für $k \in]0; \frac{1}{2}]$. An der Stelle $k = \frac{1}{2}$ besitzt sie den Funktionswert $A_\infty(\frac{1}{2}) = 5$.



4.5 Das kleinste die Figur(en) enthaltende Quadrat

Wie groß ist das kleinste Quadrat, das eine bestimmte Figur Q_n für ein $n \geq 0$ vollständig enthält? Es hat offenbar die Seitenlänge

$$\begin{aligned} 1 + 2k + 2k^2 + \dots + 2k^n &= 2 \cdot (1 + k + k^2 + \dots + k^n) - 1 = \\ &= 2 \cdot \frac{1 - k^{n+1}}{1 - k} - 1 = \frac{1 + k - 2k^{n+1}}{1 - k}. \end{aligned}$$

Wie groß ist das kleinste Quadrat, das alle Figuren Q_n für $n \geq 0$ enthält? Da $k \leq \frac{1}{2} < 1$, konvergiert der letzte Ausdruck für $n \rightarrow \infty$. Alle Figuren der Folge $(Q_n)_{n \geq 0}$ liegen also in einem Quadrat mit der (kleinstmöglichen) Seitenlänge

$$\frac{1+k}{1-k}.$$

Die zu diesem Term gehörige Funktion nimmt für $k \in]0; \frac{1}{2}]$ streng monoton im Intervall $]1; 3]$ zu. Für $k = \frac{1}{2}$ besitzt das kleinste alle Figuren umgebende Quadrat die Seitenlänge 3.

4.6 Die Grenzfigur

Die Folge $(Q_n)_{n \geq 0}$ der geometrischen Figuren ist eine Folge im metrischen Raum $(\mathcal{K}(\mathbb{R}^2), d)$ der nicht leeren, kompakten Teilmengen des \mathbb{R}^2 mit der Hausdorff-Metrik. Gemäß Abschnitt 3 ist dieser Raum vollständig. Wenn wir nachweisen, dass die Folge $(Q_n)_{n \geq 0}$ eine Cauchy-Folge ist, ist die Existenz eines Grenzwerts dieser Folge im Raum $(\mathcal{K}(\mathbb{R}^2), d)$ gesichert.

Seien dazu $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$. Wir bestimmen den Abstand $d(Q_m, Q_n)$ bezüglich der Hausdorff-Metrik. Da $Q_m \subset Q_n$, ist

$$d(Q_m, Q_n) = \max_{x \in Q_m} d(x, Q_n).$$

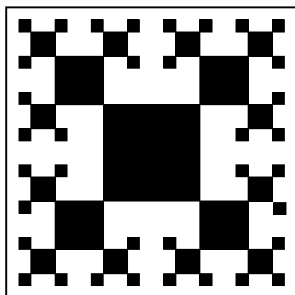
Der Abstand $d(x, Q_m)$ nimmt sein Maximum an, wenn beispielsweise x einer der vier „äußersten“ Eckpunkte der Figur Q_n ist, also ein Eckpunkt des kleinsten Q_n enthaltenden Quadrats. Bezeichnet y den entsprechenden Eckpunkt bei Q_m (also den entsprechenden Eckpunkt des kleinsten Q_m umschließenden Quadrats), so ist der gesuchte Abstand gleich $d(x, y)$. Dieser Abstand ist gleich der Summe der Diagonalen der zwischen x und y liegenden Teilquadrate von Q_n , also $d(Q_m, Q_n) = (k^{m+1} + k^{m+2} + \dots + k^n) \cdot \sqrt{2}$.

Da wir für die Überlappungsfreiheit $k \leq \frac{1}{2}$ vorausgesetzt haben, folgt aus der letzten Gleichung, dass $(Q_n)_{n \geq 0}$ eine Cauchy-Folge ist. Somit existiert der Grenzwert der Folge $(Q_n)_{n \geq 0}$ im Raum $(\mathcal{K}(\mathbb{R}^2), d)$. Nach dem Satz in Abschnitt 3 folgt:

$$Q_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} Q_n}.$$

Die Grenzfigur ist also die abgeschlossene Hülle der Vereinigung aller Mengen Q_n , $n \geq 0$.

4.7 Beispiel: Der Fall $k = \frac{1}{2}$



Zur Illustration des Bisherigen betrachten wir den Fall $k = \frac{1}{2}$ noch etwas genauer. Oben sind die Menge Q_3 sowie der Rand R des kleinsten alle Figuren Q_n , $n \geq 0$, enthaltenden Quadrats gezeichnet. Nach obigen Berechnungen besitzt dieses Quadrat die Seitenlänge 3, also den Flächeninhalt 9. Die Folge $(A_n)_{n \geq 0}$ der Flächeninhalte der einzelnen Muster konvergiert gegen 5. Die Grenzfigur Q_∞ nimmt also $\frac{5}{9}$ der Fläche des einschließenden Quadrats ein. Die Folge $(U_n)_{n \geq 0}$ der Umfänge divergiert. Der gesamte Rand R des einschließenden Quadrats gehört zur Grenzfigur Q_∞ , denn jeder Punkt dieses Streckenzugs ist Häufungspunkt der Menge $\bigcup_{n=0}^{\infty} Q_n$.

5 Variationen

Eine bewährte Strategie, um neue (nicht nur mathematische) Ideen zu entwickeln, ist es, von Bekanntem auszugehen, dies zu variieren und zu prüfen, ob sich in der veränderten Situation interessante Dinge ergeben. Variieren kann dabei sowohl als Technik für die Lehrkraft als auch als Aktivität für Schüler ertragreich sein (vgl. z.B. Schupp 2002). Die Thematik „Muster aus Quadraten“ bietet dazu einen gehaltvollen Ausgangspunkt. Man muss nur an einzelnen Aspekten des Bildungsgesetzes der Folge „wackeln“:

- Die Quadrate könnten anders aneinander gesetzt werden. Beispielsweise könnten man die von einem Folgenglied zum nächsten neu hinzukommenden Quadrate nicht an freie Ecken, sondern an freie Kanten ansetzen.
- Statt Quadrate könnten man der Figurenfolge entsprechend andere Vielecke, z.B. reguläre Polygone, zu Grunde legen.

Es bieten sich Erweiterungen ins Dreidimensionale an:

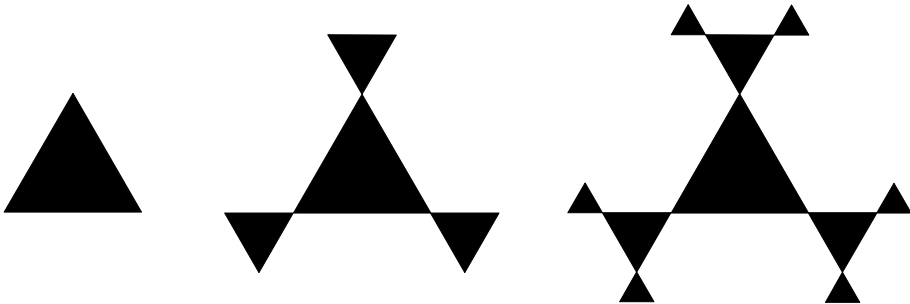
- Man könnte Würfel statt Quadrate betrachten. An die Ecken eines Ausgangswürfels werden analog kleinere Würfel angesetzt. An die freien

Ecken des so entstandenen Körpers setzt man wiederum kleinere Würfel usw.

- Die von einem Körper der Folge zum nächsten neu hinzukommenden Würfel müssen nicht an Ecken angefügt werden, man könnte sie auch an Kanten oder Flächen ansetzen.
- Statt aus Würfeln könnte man die Körper der Folge auch aus anderen Körperformen, z.B. aus regulären Polyedern, entstehen lassen.

Untersucht man bei den skizzierten Variationen analog zu Abschnitt 4 jeweils die Anzahl der vorkommenden „Grundbausteine“, bestimmt man Umfänge und Flächen bzw. Oberflächen und Volumina, so stößt man auf fast-geometrische Reihen der in Abschnitt 2 beschriebenen Struktur. Exemplarisch für die vielfältigen Variationsmöglichkeiten betrachten wir knapp „Muster aus gleichseitigen Dreiecken“. Wir werden sehen, dass sich die entsprechende Folge aus Dreiecksmustern strukturell nicht wesentlich von der Folge aus Quadratmustern unterscheidet. (Die analogen Muster mit regulären Fünfecken werden in (Kratz 1993, 190 ff.) untersucht.)

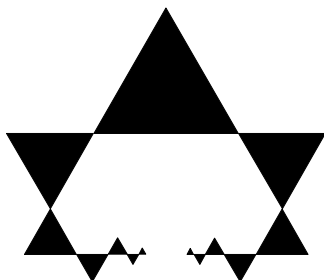
5.1 Eine Folge aus Dreiecksmustern



Den Ausgang bilden ein gleichseitiges Dreieck D_0 , für dessen Seitenlänge wir ohne Einschränkung die Länge 1 annehmen, sowie ein positiver Parameter k . Das Bildungsgesetz der Folge $(D_n)_{n \geq 0}$ ist rekursiv: Die Figur D_n entsteht aus der Figur D_{n-1} für $n \geq 1$, indem an alle Eckpunkte der Figur D_{n-1} , an denen nicht zwei Dreiecke zusammenstoßen, zusätzlich weitere gleichseitige Dreiecke der Seitenlänge k^n wie skizziert angesetzt werden. (Dabei seien alle Dreiecke topologisch abgeschlossen, sie enthalten also ihren Rand.)

5.2 Überlappungsfreiheit der Figuren

Wieder stellt sich die Frage nach Überlappungen. Fordert man die Überlappungsfreiheit bei allen Mustern D_n , so ist dies eine Forderung an den Parameter k .



Die Teildreiecke der Muster besitzen die Seitenlängen $1, k, k^2, k^3, \dots$. Alle Figuren D_n sind genau dann überlappungsfrei, wenn

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}k^2 + k^3 + k^4 \dots \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}k \\ \Leftrightarrow & k^2 \cdot (1 + k + k^2 + \dots) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}k^2 \\ \Leftrightarrow & 2k^2 \cdot \frac{1}{1-k} \leq 1 + k + k^2 \\ \Leftrightarrow & 2k^2 \leq 1 - k^3 \\ \Leftrightarrow & (k^2 + k - 1)(k + 1) \leq 0 \\ \Leftrightarrow & k^2 + k - 1 \leq 0 \\ \Leftrightarrow & k \leq \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \text{ da } k \text{ positiv.} \end{aligned}$$

Die kritische Grenze für k , bis zu der alle Figuren überlappungsfrei sind, ist also (unerwartet) genau das Verhältnis des Goldenen Schnitts $\Phi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0,618\dots$. Eine Fülle von Bezügen zu anderen Bereichen der Mathematik, zur Kunst, zur Architektur und zur Natur tut sich auf (vgl. z.B. Beutelspacher/Petri 1996)!

Anmerkung: Betrachtet man als weitere Variation analog regelmäßige Fünfecke statt Quadrate oder Dreiecke, so gelangt man zu Mustern, die für $k \leq \Phi^2$ überlappungsfrei sind! Die zugehörige Berechnung besitzt die gleiche Struktur wie die für Quadrate bzw. Dreiecke und findet sich beispielsweise in (Kratz 1993, 190 ff.).

Für das Weitere setzen wir die Überlappungsfreiheit des Dreiecksmusters, also $k \leq \Phi$, voraus.

5.3 Zahl der Dreiecke

Die (kleinste) Zahl der Dreiecke, aus denen die Figur D_n ($n \geq 0$) besteht, ist nach dem Lemma aus Abschnitt 2 mit $a = 1$, $N = 3$ und $z = 1$:

$$Z_n = \frac{1+1-3 \cdot 2^n}{1-2} = 3 \cdot 2^n - 2.$$

Die Zahl der Quadrate wächst also exponentiell mit der Basis 2.

5.4 Umfang der Figuren

Den Gesamtumfang der n -ten Figur ($n \geq 0$) gewinnt man entsprechend mit dem Lemma aus Abschnitt 2 mit $a = 3$, $N = 3$ und $z = k$:

$$U_n = 3 \cdot (1 + \frac{3}{2}n) \quad , \text{ falls } k = \frac{1}{2}, \text{ bzw.}$$

$$U_n = 3 \cdot \frac{1+k-3 \cdot 2^n \cdot k^{n+1}}{1-2k} \quad , \text{ falls } k \neq \frac{1}{2}.$$

Diese Folge der Umfänge konvergiert genau dann, wenn $k < \frac{1}{2}$. In diesem Fall ist der Grenzwert

$$U_\infty = 3 \cdot \frac{1+k}{1-2k}.$$

5.5 Flächeninhalt der Figuren

Das gleichseitige Dreieck D_0 mit der Seitenlänge 1 besitzt den Flächeninhalt $\frac{1}{4}\sqrt{3}$. Der gesamte Flächeninhalt der Figur D_n ist somit nach dem Lemma aus Abschnitt 2 mit $a = \frac{1}{4}\sqrt{3}$, $N = 3$ und $z = k^2$:

$$A_n = \frac{1}{4}\sqrt{3} \cdot \frac{1+k^2-3 \cdot 2^n \cdot k^{2n+2}}{1-2k^2}.$$

Diese Folge der Flächeninhalte konvergiert genau dann, wenn $2k^2 < 1$, wenn also $k < \sqrt{\frac{1}{2}} = 0,70\dots$. Da wir generell die Überlappungsfreiheit der einzelnen Figuren und damit $k \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,618\dots$ vorausgesetzt haben, konvergiert die Folge der Flächeninhalte stets gegen den Grenzwert

$$A_\infty = \frac{1}{4}\sqrt{3} \cdot \frac{1+k^2}{1-2k^2}.$$

6 Fazit

Die Muster aus Quadraten bieten auf der Basis einfach fassbarer geometrischer Grundformen ausgesprochen vielschichtige Möglichkeiten, Mathematik zu betreiben. Bei einer offenen Konzeption des Unterrichts können Schüler auf ihrem jeweiligen Leistungsniveau Mathematik als Feld für individuelles und kooperatives Forschen und Entdecken erleben. Leistungsschwächere mögen persönliche Erfolge erfahren, wenn sie beispielsweise die Zahl der Teilquadrate in den einzelnen Mustern zunächst abzählend bestimmen und dann induktiv Zusammenhänge der Zahlenfolge entdecken. Gleichzeitig bietet die Lernumgebung aber auch Leistungsstärkeren die Möglichkeit, ausgehend von Standardinhalten des Schulstoffes tief in die Mathematik einzutauchen.

7 Literatur

- Affolter, W. u. a. (2004). *mathbu.ch 9+*. Zug: Klett/Balmer.
- Barnsley, M. (1988). *Fractals Everywhere*. Boston: Academic Press.
- Beutelspacher, A./Petri, B. (1996). *Der Goldene Schnitt*. Heidelberg: Spektrum Verlag.
- Edgar, G. (1990). *Measure, Topology, and Fractal Geometry*. New York: Springer Verlag.
- Falconer, K. (1990). *Fractal Geometry*. Chichester: John Wiley & Sons.
- Kratz, J. (1993). *Zentrale Themen des Geometrieunterrichts aus didaktischer Sicht*. München: Bayerischer Schulbuch Verlag.
- Leuders, T./Ulm, V. (2007). Viel Eckiges – forschend entdecken, *Praxis der Mathematik*, Heft 18.
- Schupp, H. (2002). *Thema mit Variationen, Aufgabenvariation im Mathematikunterricht*. Hildesheim: Franzbecker Verlag.
- Ulm, V. (2007). Quadrate – einfach und reichhaltig, Geometrische Muster als Spielwiese für mathematisches Forschen und Entdecken, *Praxis der Mathematik*, Heft 18.

**Angewandte Mathematik
und Computereinsatz
im Mathematikunterricht**

Reinhard Oldenburg
Universität Frankfurt

Minimierung der Energie – Ein Thema für den Mathematikunterricht?

Summary

In secondary school one can study physical problems in minimization of energy by using spreadsheet applications. In this way geometric modeling of situations and algebraic modeling of values become the most important part of the problem solving process.

Einleitung

Die Entwicklung einer mathematischen Theorie der Mechanik stellt eine der herausragenden Leistungen der Neuzeit dar. Dank der Arbeiten von Newton und weiteren Physikern und Mathematikern gelang es, die Bewegungen mechanischer Systeme mit hervorragender Genauigkeit zu berechnen. Das wichtigste mathematische Werkzeug dazu sind Differentialgleichungen und diese sind (selbst in diskretisierter Form) für Schüler der Sekundarstufe II nur schwer und in der Sekundarstufe I gar nicht zugänglich. In der Konsequenz laufen Schüler Gefahr, eine fundamentale Einsicht sowohl in die Natur unserer Welt (ihre Berechenbarkeit) wie in die der Mathematik (ihre Leistungsfähigkeit) zu versäumen.

Optimierungsprobleme sind generell weitaus leichter zu verstehen, als Differentialgleichungen, und die Minimierung der Energie ist ein anschauliches physikalisches Konzept, das auf Optimierungsprobleme führt, die in vielen Situationen mit Computerhilfe verhältnismäßig leicht gelöst werden können. Wir werden zeigen, dass damit auch anspruchsvolle Probleme behandelt werden können.

Dabei wird der Computer zwar als Blackbox genutzt, aber die üblichen negativen Auswirkungen von Blackboxes sind hier nicht zu befürchten, denn die Bedeutung der Antwort einer Blackbox ist klar: Ein Optimierungsalgorithmus, angewandt auf eine Funktion f , gibt eine Stelle an, deren Funktionswert möglichst klein ist. Man vergleiche das mit einer Beschreibung dessen, was die Ausgabe eines Algorithmus zur Lösung einer Differentialgleichung bedeutet!

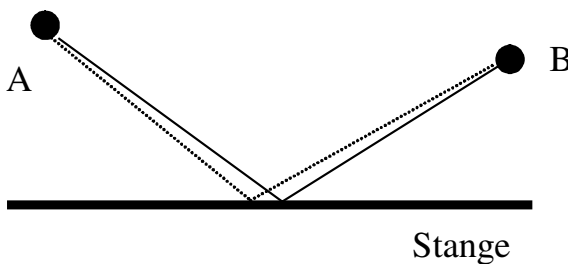
Gummiband um Stange

Ein Gummiband (Spanngurt) wird an zwei Stellen A und B angehakt und um eine Stange herumgeschlagen. Es rutscht an der Stange entlang, bis es eine bestimmte Position erreicht hat. Verschiebt man es anschließend aus dieser Position, rutscht es wieder zurück. Zwei denkbare Lagen des Bandes sind in der unten stehenden Skizze eingezeichnet.

Welche dieser Positionen ist nun die optimale? Das Band will sich verkürzen, um die Spannenergie zu minimieren, also sollte die Gesamtlänge des Bandes minimiert werden. Wenn man die Stange als x-Achse eines Koordinatensystems wählt, kann der Berührungspunkt mit Koordinaten $(x|0)$ angenommen werden. Für A und B wählt man erstmal einfache Zahlenpaare, z.B. $A(0|5)$, $B(10|4)$. Dann beträgt die Gesamtlänge offenbar $L = \sqrt{5^2 + x^2} + \sqrt{(10-x)^2 + 4^2}$.

Sobald diese Einsicht gewonnen ist, kann man auf viele verschiedene Arten weiterkommen:

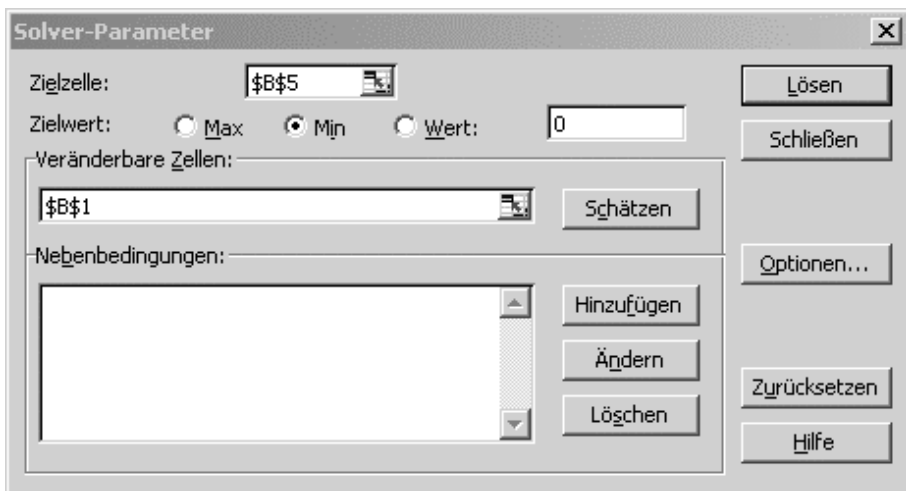
- Man verifiziert, daß die experimentell gefundene Konfiguration tatsächlich zu einer kürzeren Länge führt als alternative.
- Man tabelliert die Funktion mit einer Tabellenkalkulation und sucht darin das Maximum von Hand.
- Man läßt ein Minimum der Funktion suchen durch einen als Blackbox gegebenen Algorithmus, z.B. in einer Tabellenkalkulation.
- Analysis tut's auch, ist aber erstaunlich mühsam in diesem Beispiel, weil die Ableitungen der Wurzeln die Dinge kompliziert machen.



In diesem Beitrag werden alle Probleme mit dem Solver der Tabellenkalkulation Excel ermittelt. Für das vorliegende Beispiel ist die Tabelle übersichtlich, ebenso die Formeln in den Zellen (die Zelle B1 wurde in x umbenannt):

| | A | B |
|---|-------------|-----------------------|
| 1 | Position x | 5,55555556 |
| 2 | | |
| 3 | Länge AP | 7,47423558 |
| 4 | Länge PB | 5,97938847 |
| 5 | Gesamtlänge | 13,453624 |
| 6 | | |
| | A | B |
| 1 | Position x | 5,55555555539275 |
| 2 | | |
| 3 | Länge AP | =WURZEL(x^2+5^2) |
| 4 | Länge PB | =WURZEL((10-x)^2+4^2) |
| 5 | Gesamtlänge | =B3+B4 |
| 6 | | |

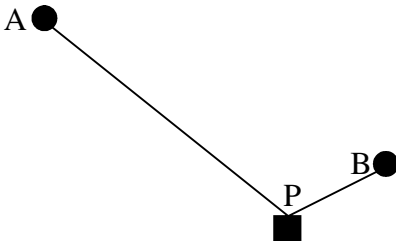
Um aus einem weitgehend beliebigen Startwert diese Lösung zu erhalten, ruft man aus dem Extra-Menü den Solver auf und wählt die folgenden, größtenteils selbsterklärenden Einstellungen:



Natürlich ist das hier gestellte Problem ein Klassiker und äquivalent zu Versionen in verschiedenen Straßenbau-, Wasserhol- oder Feuerwehreinkleidungen (Schupp 1992). Klar ist deswegen auch, dass es eine einfache geometrische Lösung durch Spiegeln gibt, und diese sollte man selbstverständlich mit den Schülern auch besprechen. Der entscheidende Punkt hier ist aber, dass man mit der Optimierung durch den Solver ein sehr allgemeines Werkzeug zur Verfügung hat.

Gewicht am Faden

Ein dünner Faden der festen Länge L wird an zwei Haken A und B, die (damit es nicht zu einfach wird) nicht gleich hoch sind, befestigt. An den Faden wird ein Massestück gehängt, das auf ihm reibungsfrei gleiten kann. Es zieht den Faden nach unten und verleiht ihm einen Knickpunkt P. Bildlich sieht das dann folgendermaßen aus:



Wenn man sich nun Koordinaten für die Aufhängepunkte (z.B. $A(0|5)$, $B(3|2)$) und einen Wert für die Fadenlänge (z.B. $L=8$) vorgibt, wohin rutscht P? Natürlich wird die potentielle Energie minimiert, d.h. die y-Koordinate von P wird minimal unter der Nebenbedingung, dass die Strecken AP und PB zusammen die vorgegebene Länge L besitzen. Damit ist die Modellbildung abgeschlossen und wir können im Modell nach einer Lösung suchen.

Es gibt sehr viele Arten, dieses Optimierungsproblem zu lösen. Bei der Suche nach einer allgemeinen Methode nutzen wir wiederum den Solver von Excel.

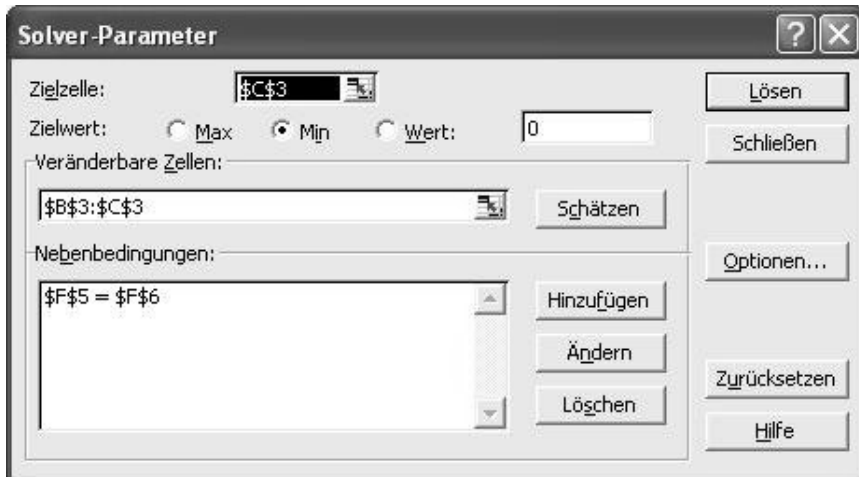
Schritt 1: Erstellen einer Arbeitsmappe mit den entscheidenden Formeln und Informationen:

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---------------------------|---|---|-------------------|------------|
| 1 | | Position der Masse P(x,y) | | | | |
| 2 | | x | y | | | |
| 3 | P | 1,5 | 2 | | Abstand P, A | 3,35410197 |
| 4 | A | 0 | 5 | | Abstand P, B | 1,5 |
| 5 | B | 3 | 2 | | Fadenlänge | 4,85410197 |
| 6 | | | | | Vorgegebene Länge | 8 |

Die Formeln in den Zellen sehen so aus:

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|--------------|---|---|-------------------|------------------------------|
| 1 | | Position der | | | | |
| 2 | | x | y | | | |
| 3 | P | 1,5 | 2 | | Abstand P, A | =WURZEL((B3-B4)^2+(C3-C4)^2) |
| 4 | A | 0 | 5 | | Abstand P, B | =WURZEL((B3-B5)^2+(C3-C5)^2) |
| 5 | B | 3 | 2 | | Fadenlänge | =F3+F4 |
| 6 | | | | | Vorgegebene Länge | 8 |

Schritt 2: Aufruf des Solvers und Angabe, dass C3 minimiert werden soll und dabei B3 und C3 variiert werden dürfen, wobei $F5=F6$ einzuhalten ist. Im Solver-Menü sieht das folgendermaßen aus:



Schritt 3: Nach Klick auf den Lösen-Button findet Excel $P=(2,107|-0,208)$. Damit ist das Problem gelöst. Ein schnell aufgebautes Experiment bestätigt die Korrektheit.

Eine Rückschau: Zur Problemlösung muss das physikalische Optimierungsproblem mathematisch modelliert werden und zwar soweit, dass die zu minimierende Größe und die Nebenbedingungen als Term bzw. Gleichungen vorliegen. Dann kann der Computer die (numerische) Lösung übernehmen.

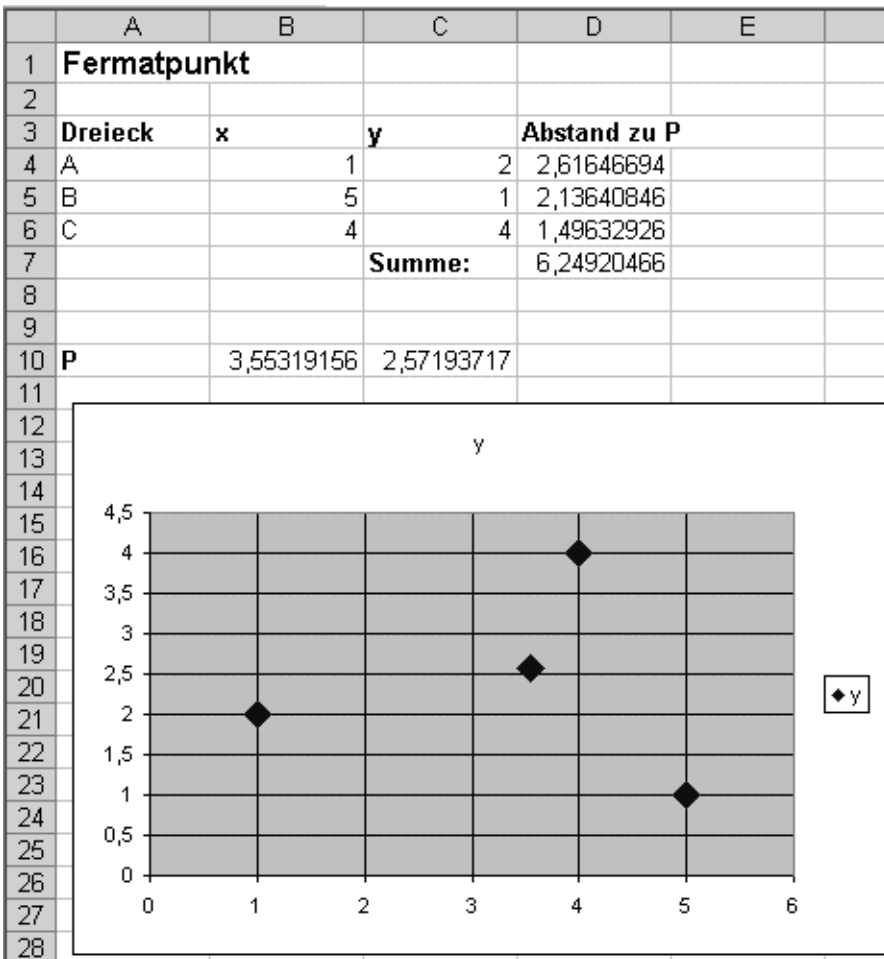
Das Problem des Gewichts am Faden kann auch durch Differentialrechnung gelöst werden (reichlich mühsam) oder durch eine elementare geometrische Überlegung: Angenommen, P sei schon in optimaler Lage. Dann spiegelt man B an der Waagerechten durch P , so dass also PB und PB' gleich lang sind. Dann liegen A, P, B' auf einer Geraden (sonst könnte man B' und damit P tiefer ziehen) und die Entfernung AB' ist gleich L . Wenn umgekehrt der Punkt P noch nicht bekannt ist, kann er mit dieser Idee konstruiert werden: Man schlägt einen Kreis mit Radius L um A . Der Schnitt mit der Vertikalen durch B liefert B' . Die Mittelsenkrechte von B und B' schneidet AB' in P . En passant sei bemerkt, dass P auf einer Ellipse mit Brennpunkten A und B liegt – schließlich haben wir hier unmittelbar die Gärtnerkonstruktion vor uns.

Diese schöne geometrische Lösung hat leider den Nachteil, dass sie problemspezifisch ist: Variationen des Problems erfordern grundsätzlich neue Überlegungen. Die rechnerische Lösung dagegen – und sei sie auch mit der Krücke Computer ermittelt – bahnt den Weg zur Beherrschung einer riesigen Problemklasse.

Fermatpunkt

Der Fermatpunkt eines Dreiecks ABC ist derjenige Punkt P, der die Abstandssumme $|AP|+|BP|+|CP|$ minimiert. Dies ist äquivalent zu einer Energieminimierung: Man bohrt in eine horizontale Platte an den Stellen A,B und C Löcher und steckt durch diese Löcher drei Fäden mit drei gleich großen Gewichten daran. Die Fadenenden oberhalb der Platte werden zu einem Knoten von drei Fäden verknotet. Dieser Knoten wird dann zum Fermatpunkt rutschen, denn die Fadenlänge insgesamt ist konstant. Die Lageenergie der Gewichte ist umso kleiner, je länger die nach unten hängenden Fadenstücke sind, also je kürzer der Fadenanteil ist, der oberhalb der Platte „verbraucht“ wird.

Die Excel-Realisierung (vgl. Farbbild 13):



Kettenlinie

Eine hängende Kette oder Schnur (entscheidende Charakteristika: biegsam, nicht längenelastisch, homogene Massenverteilung) zeigt einen charakteristischen Verlauf, der auf den ersten Blick (wie andere differenzierbare Kurven in der Nähe eines Minimums auch) einer Parabel ähnelt, von dieser sich aber doch unterscheidet.

Wir nehmen an, die Kette sei an den Punkten $(x_0|y_0)$ und $(x_E|y_E)$ fest gehalten und besitze die Länge L .

Die entscheidende Vereinfachung kommt durch eine diskrete Modellierung: Der Verlauf der Kette wird gegeben durch die diskreten Punkte $(x_i|y_i)$,

$i=0..n$. Die x -Stellen kann man fest vorgeben, z.B. $x_i = x_0 + \frac{i}{n} \cdot (x_E - x_0)$.

Die Variablen y_0 und y_n sind dann durch die Aufhängepunkte gegeben, während die Variablen $y_i, i=1..n-1$ die Optimierungsvariablen sind. Minimiert wird die potentielle Gesamtenergie, also die Summe der Energien der einzelnen „Segmente“. Diese ist proportional zur Länge und zur mittleren Höhe der Segmente. Damit ist die Anlage des Tabellenkalkulationsblattes klar:

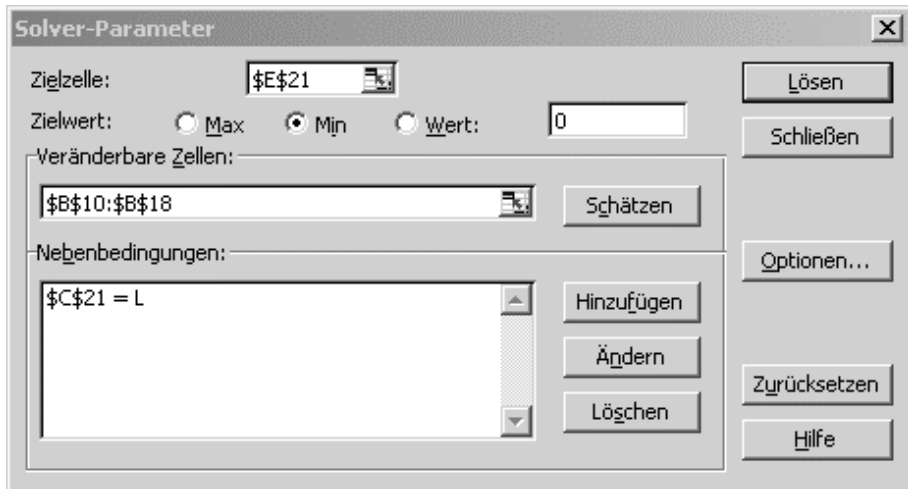
| | A | B | C | D | E |
|----|-----------------------|-------------|---------------------|-------------|----------------|
| 1 | Hängende Kette | | | | |
| 2 | | | | | |
| 3 | Länge= | 12 | | x0 | 0 |
| 4 | | | | y0 | 5 |
| 5 | n= | 10 | | xE | 5 |
| 6 | | | | yE | 7 |
| 7 | | | | | |
| 8 | x | y | Segmentlänge | Höhe | Energie |
| 9 | 0 | 5 | | | |
| 10 | 0,5 | 3,06163783 | 2,001811159 | 4,03081891 | 8,06893828 |
| 11 | 1 | 1,9155832 | 1,250376424 | 2,48861051 | 3,11169992 |
| 12 | 1,5 | 1,27098445 | 0,815786463 | 1,59328382 | 1,29977938 |
| 13 | 2 | 0,96693498 | 0,585188924 | 1,11895971 | 0,65480283 |
| 14 | 2,5 | 0,92731712 | 0,501567119 | 0,94712605 | 0,47504728 |
| 15 | 3 | 1,14174704 | 0,544040616 | 1,03453208 | 0,56282747 |
| 16 | 3,5 | 1,66349936 | 0,722651701 | 1,4026232 | 1,01360804 |
| 17 | 4 | 2,62482748 | 1,083582834 | 2,14416342 | 2,32337867 |
| 18 | 4,5 | 4,26590878 | 1,715560499 | 3,44536813 | 5,91073747 |
| 19 | 5 | 7 | 2,779434261 | 5,63295439 | 15,6564264 |
| 20 | | | | | |
| 21 | | Gesamtlänge | 12 | Ges-Energie | 39,0772458 |
| 22 | | | | | |

Die Formeln in den Zellen zeigt die nächste Abbildung:

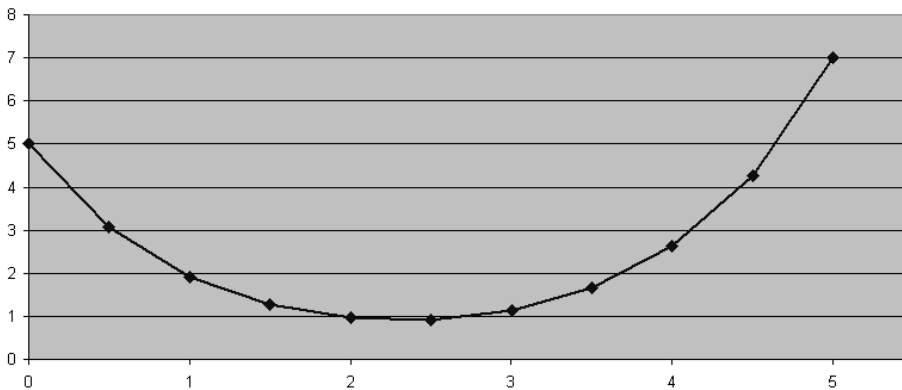
| | A | B | C | D | E |
|----|-----------------------|-------------------|----------------------------------|--------------|-----------------|
| 1 | Hängende Kette | | | | |
| 2 | | | | | |
| 3 | Länge= | 12 | x0 | 0 | |
| 4 | | | y0 | 5 | |
| 5 | n= | 10 | xE | 5 | |
| 6 | | | yE | 7 | |
| 7 | | | | | |
| 8 | x | y | Segmentlänge | Höhe | Energie |
| 9 | =E3 | =E4 | | | |
| 10 | =A9+(xE-x0)/n | 3,06163782624779 | =WURZEL((B10-B9)^2+(A10-A9)^n) | =(B9+B10)/2 | =C10*D10 |
| 11 | =A10+(xE-x0)/n | 1,91558320152651 | =WURZEL((B11-B10)^2+(A11-A10)^n) | =(B10+B11)/2 | =C11*D11 |
| 12 | =A11+(xE-x0)/n | 1,27098444743641 | =WURZEL((B12-B11)^2+(A12-A11)^n) | =(B11+B12)/2 | =C12*D12 |
| 13 | =A12+(xE-x0)/n | 0,966934982562305 | =WURZEL((B13-B12)^2+(A13-A12)^n) | =(B12+B13)/2 | =C13*D13 |
| 14 | =A13+(xE-x0)/n | 0,927317116337065 | =WURZEL((B14-B13)^2+(A14-A13)^n) | =(B13+B14)/2 | =C14*D14 |
| 15 | =A14+(xE-x0)/n | 1,14174703990927 | =WURZEL((B15-B14)^2+(A15-A14)^n) | =(B14+B15)/2 | =C15*D15 |
| 16 | =A15+(xE-x0)/n | 1,66349935792685 | =WURZEL((B16-B15)^2+(A16-A15)^n) | =(B15+B16)/2 | =C16*D16 |
| 17 | =A16+(xE-x0)/n | 2,62482748010609 | =WURZEL((B17-B16)^2+(A17-A16)^n) | =(B16+B17)/2 | =C17*D17 |
| 18 | =A17+(xE-x0)/n | 4,26590877809734 | =WURZEL((B18-B17)^2+(A18-A17)^n) | =(B17+B18)/2 | =C18*D18 |
| 19 | =A18+(xE-x0)/n | =E6 | =WURZEL((B19-B18)^2+(A19-A18)^n) | =(B18+B19)/2 | =C19*D19 |
| 20 | | | | | |
| 21 | | Gesamtlänge | =SUMME(C10:C19) | Ges-Energie | =SUMME(E10:E19) |

Die Pythagoras-Formeln in den Zellen C10 bis C19 sind so lang, dass sie nicht vollständig zu lesen sind. In C10 steht beispielsweise:
 $=\text{WURZEL}((B10-B9)^2+(A10-A9)^2)$

Die Energieminimierung unter der Nebenbedingung, dass die addierte Länge aller Segmente gleich der vorgegebenen Länge ist, gibt man dann in den Solver ein:



Das Ergebnis sieht aus, wie man es erwartet (vgl. Farbbild 14):



Was lernen die Schüler bei einem solchen Zugang zur hängenden Kette? Natürlich keinerlei Differentialrechnung. Weder Differentialgleichungen noch die Minimierung von Funktionalen werden thematisiert. Deren Funktion wird zur einen Hälfte (Gewinnung von konkreten Zahlen) durch die Black-box des Optimierungsalgorithmus ersetzt, zur anderen Hälfte (Gewinnung einer analytischen Beschreibung der Kurve, Gewinnung einer durch die Aufhängepunkte und die Kettenlänge parametrisierten allgemeinen Lösung) komplett ignoriert. Dieser Verzicht auf wichtige und schöne Mathematik ist

aber notwendig, um das Problem auch Schülern der Sekundarstufe I zugänglich zu machen. Diese profitieren in verschiedenen Bereichen:

- Sie lernen exemplarisch die eingangs erwähnte Berechenbarkeit der Welt kennen.
- Sie lernen das Konzept der Diskretisierung kennen.
- Sie benutzen den Satz des Pythagoras, um geometrische Aussagen durch Gleichungen zu modellieren.
- Sie benutzen funktionale Modellierung mit Funktionen in mehreren Veränderlichen, um die Gesamtenergie zu beschreiben.

Wichtig für weitere Übungen sind Variationsmöglichkeiten. Diese gibt es zur Genüge:

- In der Mitte hängt ein zusätzliches Gewicht.
- Die Kette ist elastisch. Eine Verlängerung um ΔL erfordert aber eine Energie von ΔL^2 .
- Zwischen den Punkten (0|0) und (1|0) ist eine Schnur (z.B. der Länge 31) befestigt. In welche Form muss man sie legen, damit zwischen x-Achse und Kurve der größte Flächeninhalt entsteht?

Fazit

Die Anwendung leistungsfähiger, aber von ihrer Bedeutung her leicht verständlicher Methoden der Computermathematik auf physikalische Systeme lohnt sich, weil im Modellierungsschritt, also im Aufstellen der Zielfunktion und der Gleichungen für Einschränkungen, interessante Mathematik, insbesondere Algebra und Geometrie, getrieben wird, und weil die Problemstellungen meist so sind, dass man eine gewisse Intuition hat, wie die Lösung wohl aussehen wird. Das Ergebnis der Rechnung wird daher mit Erwartungen seitens des Lernenden konfrontiert und genau diese Konfrontation ist es, an der sich mathematische Vorstellungen des Lernenden ebenso wie Annahmen im Modellierungsprozess bewähren oder an der sie falsifiziert werden können. Es zeigt sich bei diesen Anwendungen erneut, was ich schon an anderer Stelle für die Nutzung von Computeralgebrasystemen postuliert habe: Entscheidend für den Lernprozess ist das Vorliegen von Erwartungen.

Literatur

- Oldenburg, R. (2006). Numerische Optimierung – ein schneller Weg zu komplexer Modellbildung. *Istron* Bd. 9, Hildesheim.
- Schupp, H. (1992). *Optimieren*. Mannheim.

Michael Gieding
Pädagogische Hochschule Heidelberg

50 Jahre Wankelmotor – Geometrische Aspekte eines fächerübergreifenden Schülerprojekts

Summary

The article illustrates geometrical aspects of a pupil's project to the Wankel engine on the occasion of its 50th birthday in 2007.

Vorbemerkung

Einen Tag nachdem am 9. November 1989 die Mauer fiel, formulierte Willy Brandt vor dem Schöneberger Rathaus in Berlin die historischen Worte: „Jetzt wächst zusammen, was zusammen gehört“. Zuvor gab es in den 60er Jahren bereits Versuche, zumindest im technischen Bereich West und Ost zusammen wachsen zu lassen. Manch einer wollte ihn gar auf DDR-Autobahnen gesehen haben: einen pfeilschnellen Trabbi mit Wankelmotor von NSU. Die Mehrzahl der „Ossis“ hielt das jedoch eher für ein Gerücht, was bei der Geheimhaltung, die in der DDR ja oberstes Staatsgebot war, nicht unverständlich ist. In der Tat gab es in den 60er Jahren ein Lizenzabkommen des DDR-Automobilbaus mit NSU bezüglich zweier Wankelmotoren. Diese wurden zumindest im Experimentierstadium in Autos der Marke Trabant und Wartburg eingebaut. Das Experiment scheiterte. Wahrscheinlich lag es an beiden Seiten. In unzulängliche Ostautos sollte ein sehr problembehafteter Westmotor eingebaut werden.

Etwas später in den 80er Jahren gelang es ein wenig besser. In Zwickau liefen Trabbis mit Motoren von VW vom Band. Die 80er Jahre scheinen die Zeit der großen politischen Worte zu sein. Der Trabbi mit Polomotor assoziiert das Gorbatschow-Zitat „Wer zu spät kommt, den bestraft das Leben.“ Die Wende holte den Trabbipolo ein und er verschwand von der Bildfläche. Heute taugt er im Gegensatz zu seinen Vorgängern nicht einmal mehr zum Nostalgieobjekt.

Um den Trabbipolo ist es nicht schade. Sein Verschwinden wurde ja dadurch begründet, dass die Grundlagen eines echten Zusammenwachsens zwischen Ost und West gelegt wurden. Ein Prozess, von dem wir heute wissen, dass er letztlich problematischer ist als die Verwendung von Lizenzmotoren in Plastikautos.

Das, was sich im großen gesellschaftspolitischen Rahmen immer wieder als äußerst schwierig präsentiert, klappt im persönlichen Bereich häufig

problemlos. Zumindest zeigte die jahrelange Zusammenarbeit von Prof. Dr. Ast und dem Autor, dass Ostberlin und Baden/Schwaben zusammenwachsen können.

Das Jubiläum

Wir schreiben das Jahr 2007. Es ist das Jahr des 50. Geburtstages eines Motors, der immer wieder ob der ihm zugrunde liegenden genialen Idee, aber auch wegen seiner Probleme im praktischen Betrieb für Schlagzeilen sorgen sollte: der Wankelmotor. Sein Erfinder Felix Wankel hatte die Idee bereits 1927 im Alter von 25 Jahren. Bis zu ihrer ersten erfolgreichen praktischen Umsetzung gingen 50 Jahre ins Land. Am 1. Februar 1957 lief ein Prototyp der DKM 54 bei NSU in Neckarsulm längere Zeit mit Erfolg.

Das Projekt aus allgemeiner fachübergreifender Sicht

Ein solches Jubiläum ist ein geeigneter Aufhänger für ein fächerübergreifendes Projekt mit Schülern der Sekundarstufe I. Hinsichtlich der Fächer Physik und Technik steht die Funktionsweise des Motors im Vordergrund. Allgemein bekannt ist, dass der Wankelmotor nach einer anfänglichen Euphorie in den 60er Jahren von vielen Autobauern auch für den Bereich der Forschung als nicht mehr relevant angesehen wurde. Die Gründe hierfür sind u.a. in der Ölkrise der 70er Jahre zu suchen. Ein Blick auf die Preisanzeigen der Tankstellen zeigt die Aktualität des Themas. Offensichtlich sind die Bezüge zu den Fächern Geschichte, Wirtschaftslehre und Politik.

Jeder Motor hat gewisse mathematische Grundlagen. Ein Bezug des Projekts zum Mathematikunterricht ergibt sich insbesondere durch die geometrischen Objekte, die der Funktionsweise des Wankelmotors zugrunde liegen: Kreise, Kreisbögen, Dreiecke und eine besondere Rollkurve. Letztere wird durch das Zusammenspiel der zuvor genannten Objekte erzeugt. Eine Untersuchung der Entstehung der Kurve, die die Form des Motorgehäuses entscheidend bestimmt, schult das geometrische Vorstellungsvermögen der Schüler. Geradezu inflationär und sie damit eher zu nichtssagenden Schlagworten verkommen lassend gebraucht die heutige Mathematikdidaktik die Begriffe Anwendungs-/Realitätsbezug und Modellierung. Die Modellierungs- und Anwendungsaspekte des Projektes sind evident. Ihre Einbettung in eine pädagogiklastige Theorie, die nichts weiter ist, als eine pseudowissenschaftlich verbrämte Formulierung von Allgemeinplätzen, strebt der Autor hier und auch in Zukunft nicht an.

Der jahrzehntelange Kampf von Felix Wankel gegen alle möglichen Widerstände und Schwierigkeiten, die sich der Umsetzung seiner Idee von einem verschleißarmen und laufruhigen Motor entgegenstellten, nötigt höchste Achtung ab. Wegen seiner langen Schaffensperiode in Heidelberg

dürfte eine Recherche über das Leben von Felix Wankel insbesondere für Schüler aus der Kurpfalz interessant sein. Für den schwäbischen Schüler ergibt sich ein besonderer Bezug durch die Arbeit von Wankel für NSU in Neckarsulm (heute Audi). Restlos begeistert von Wankel werden wohl fast alle Schüler Deutschlands sein, wenn sie bei ihren Recherchen erfahren, dass der große Erfinder und Autodidakt zeitlebens eine Abneigung gegen mathematische Formeln hatte.

Materialien zu Wankel und seinem Motor finden die Schüler ausreichend und kostenfrei im Internet. Der Medienpädagoge erkennt jetzt, dass auch die Informatik in das Projekt involviert ist. Gerne überlässt es der Autor diesen Kollegen, eine „abenteuerliche Spurensuche im Internet“, also ein WebQuest zu generieren. Man könnte auch Linksammlung sagen. Der Leser findet sie im Anhang.

Wirkliche Bezüge zur Informatik erhält das Projekt etwa dadurch, dass die Arbeitsweise des Motors als Algorithmus betrachtet wird. Die Programmierung eines Motormodells könnte sich anschließen. Letzteres dürfte dann jedoch die informatischen Kenntnisse der Schüler in der SI überschreiten.

Kenntnisse aus dem Bereich der informationstechnischen Grundbildung sind allerdings ausreichend, um Motorenmodelle ggf. in stilisierter Form zu erstellen. Sicherlich findet man derartiges auch im Internet. Zur informationstechnischen Grundbildung gehört jedoch auch das Wissen zum Gebrauch von Bildern, auf denen ein Copyright steht.

Das Projekt Wankelmotor bietet eine Fülle an fachübergreifenden Fragestellungen. Im Rahmen eines Artikels wie dem vorliegenden ist es nicht möglich, alle Aspekte des Projekts gleichermaßen zu illustrieren. Aus diesem Grund erfolgt eine Konzentration auf geometrische Grundlagen des Motors. Konkret wird es darum gehen, eine stilisierte grafische Darstellung eines Wankelmotors zu generieren.¹ Dieses soll mittels dynamischer Geometriesoftware und Tabellenkalkulation geschehen.

Außerhalb der geometrischen Fragestellungen lag es dem Autor am Herzen, das Leben Felix Wankels in wenigen kurzen Punkten darzustellen. Neben dem Motor selbst dürfte sein Erfinder eine motivierende Wirkung für das Projekt haben.

Die Projektvorstellung wäre ohne den Hinweis auf ein spezielles Museum im Heidelberger Raum nicht vollständig. Es handelt sich um das Museum Autovision in Altlußheim. Ein Besuch dieses Museums ist nicht nur für das Projekt von unschätzbarem Wert. Es ist nicht gerade üblich, dass jeder Besucher eines Museums kostenfrei und ohne Einschränkungen fotografieren und die Fotos dann auch noch beliebig weiter verwenden darf. Der Autor bedankt sich ganz herzlich bei den Betreibern von Autovision für diese Möglichkeiten. Alle Fotos im vorliegenden Artikel wurden im genannten Museum geschossen.

Prinzipielle geometrische Grundlagen des Wankelmotors

Die Genialität der Wankel'schen Idee kommt bereits in der Typenbezeichnung zum Tragen: DKM steht für Drehkolbenmaschine.² Sowohl der Innenläufer (der Kolben) als auch der Außenläufer führen reine Drehbewegungen aus. Insbesondere diese Simplität der Kolbenbewegung verhiess Laufruhe und Verschleißarmut. Geometrisch vereinfacht gesehen ist der Kolben ein extrudiertes Reuleaux-Dreieck, ein spezielles Gleichdick. Unter einem Gleichdick versteht man eine Kurve konstanter Breite: Zu einem Gleichdick existiert ein umschreibendes Quadrat derart, dass bei geeigneter Rotation stets alle 4 Seiten des Quadrates durch das Gleichdick berührt werden.

Die Form des inneren Teiles des Außenläufers wird maßgeblich durch eine spezielle Epitrochoide bestimmt (Abbildung 1).

Neben anderen Schwierigkeiten war der DKM schon wegen des Umstandes, dass sich die Zündkerzen im rotierenden Läufer im Inneren des Motors befanden, praktisch nur schwer umzusetzen. Aus diesem Grunde änderten die Ingenieure von NSU die Kinematik der DKM zu der der Kreiskolbenmaschine (KKM). Bei der KKM rotiert der Außenläufer nicht mehr. Er bildet praktisch das Gehäuse des Motors (Abbildung 2).

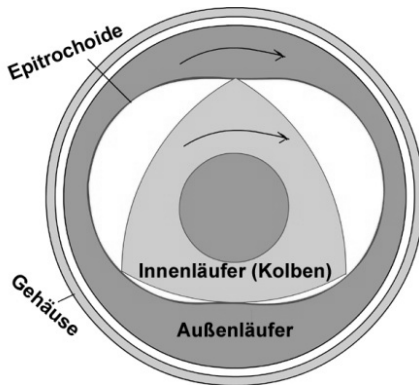


Abb. 1: Drehkolbenmaschine
(vgl. Farbbild 16)



Abb. 2: Kreiskolbenmaschine
(vgl. Farbbild 17)

Der Kolben dreht sich auf einer Exzenterwelle. Damit vollführt er eine Planetenbewegung. Die Ecken des Gleichdicks beschreiben die Epitrochoide des Motorgehäuses.

Der Erfinder

Felix Wankel war das, was man den „klassischen Tüftler“ nennt. Geboren wurde er am 13. August 1902 im badischen Lahr (Ortenaukreis). Sein Vater

überlebt den 1. Weltkrieg nicht. Mit 13 Jahren zieht er mit seiner Mutter nach Heidelberg und lebt dort in der Bergstraße 29. Er besucht das Gymnasium in Weinheim, verlässt dieses allerdings schon in der Unterprima. Es sind insbesondere die Fächer Mathematik und Physik, die Wankel Schwierigkeiten bereiteten.

In Heidelberg macht er eine Ausbildung, die so rein gar nichts mit seinem späteren Wirken zu tun hat: Er erlernt den Beruf des Verlagskaufmanns. Sein Arbeitsplatz im Verlag Carl Winter in Heidelberg (heute Universitätsverlag Winter GmbH) offeriert ihm die Lektüre der Biografien bedeutender Wissenschaftler und Ingenieure. Wankel beschließt, selbst ein Erfinder zu werden und das, ohne jemals studiert zu haben.

In den 20er Jahren des vorigen Jahrhunderts richtete sich Wankel in der Kleinschmittstraße 8 in Heidelberg eine kleine Experimentierwerkstatt ein. Der Vater eines Freundes stellte ihm seinen dortigen Abstellraum zur Verfügung. Wankel begann, mit Motoren zu experimentieren. 1927 rollte aus seiner Werkstatt die erste Fahrmaschine. Wankel begann in dieser Zeit mit Experimenten zu Drehkolbenmotoren.

In der Zeit des Nationalsozialismus erfuhr Wankel durch die Rüstungsindustrie eine gewisse Unterstützung. Er richtete sich ein Forschungslabor in Lindau am Bodensee ein, welches nach dem Krieg durch die Alliierten zerstört wurde.

Die Industrie war weiterhin an Wankel interessiert und ermöglichte ihm, die Fortsetzung seiner Versuche zu einem Motor, der praktisch ohne Ventile auskommt. Insbesondere war es die Firma NSU, die an die Idee von Wankel glaubte. 1960 lief in Neckarsulm ein NSU Prinz III mit einem KKM 250. 1963 wurde auf der IAA der NSU Wankel Spider (Abbildung 3) ausgestellt. Ein Jahr später war er verkaufsfähig. Obwohl der Wankelmotor in der Praxis immer wieder Probleme bereitete, erwarben viele Firmen Lizenzen. Felix Wankel hatte dadurch bis an sein Lebensende keinerlei finanzielle Probleme. Mazda baut bis heute Automobile mit Wankelmotor. Abbildung 4 zeigt einen Vorgänger des heutigen Modells RX 8, dessen Wankelmotor 2004 zum „Motor des Jahres“ gewählt wurde.



Abb. 3: Wankel Spider



Abb. 4: Mazda RX7

1969 erhielt Felix Wankel die Ehrendoktorwürde der Technischen Hochschule München. Ein Jahr später wurde ihm das Große Bundesverdienstkreuz verliehen.

Felix Wankel starb nach schwerer Krankheit am 9. Oktober 1988 in seinem Haus in Heidelberg. Sein Grab befindet sich auf dem Bergfriedhof in Heidelberg.

Wankels persönliches Auto als Ideengeber für das Projekt

Wankel besaß zeitlebens keinen Führerschein. Trotzdem hatte er ein eigenes Auto, einen Mercedes 350 SL. Auf Wunsch von Wankel wurde dieser mit einem Wankelmotor ausgestattet, wie er damals von Daimler Benz für den C111 Sportwagen gebaut wurde. Felix Wankel verfügte damit über den schnellsten SL, den es jemals gab.

Dieses Automobil kann als Aufhänger für die geometrischen Aspekte des Projektes dienen. Wankel kennzeichnete die Besonderheit seines Autos durch eine entsprechende Applikation an der Heckklappe seines SL: eine stilisierte Darstellung der Idee der Kreiskolbenmaschine (Abbildung 5). Eine solche soll im Folgenden generiert werden.



Abb. 5: Wankels 350 SL, Applikation an der Heckklappe

Generierung des Kreiskolbens

Zur Generierung der stilisierten Darstellung der Drehkolbenmaschine eignet sich eine dynamische Geometriesoftware (DGS). Für den vorliegenden Artikel wurde Sketchpad verwendet, es kann jedoch auch jedes der gängigen Systeme wie etwa Dynageo oder Cinderella verwendet werden.

Recht gut erkennt man das Prinzip des Kreiskolbens. Die Konstruktion des Reuleaux-Dreiecks dürften die Schüler selbst entdecken: Wir konstruieren zunächst ein gleichseitiges Dreieck \overline{ABC} mit der Seitenlänge a . Dann

konstruieren wir Kreisbögen um die Eckpunkte des Dreiecks \overline{ABC} mit dem Radius a .

Der schwierigere Teil der Konstruktion unserer stilisierten Darstellung ist die Konstruktion der Epitrochoide.

Untersuchung der Abrollverhältnisse der Planetenbewegung

Zur Untersuchung der Entstehung der Epitrochoide wird ein Wankelmotor (Abbildung 6) genauer betrachtet. Die Schüler erkennen am Schnittmodell, wie die Epitrochoide prinzipiell entsteht. Der innere Kreis des Kolbens rollt gleitfrei auf einem kleineren Kreis ab, wobei sich dieser kleinere Kreis im Inneren des abrollenden Kreises befindet. Jede der Kolbenecken beschreibt die Kurve, die wir zu generieren haben. Für die Form der Kurve scheint es notwendig, die Verhältnisse der beiden Kreise zu untersuchen. Sowohl das Auszählen der Zähne als auch die Messung der Radien dieser beiden Kreise verweist auf das Verhältnis 2:3.

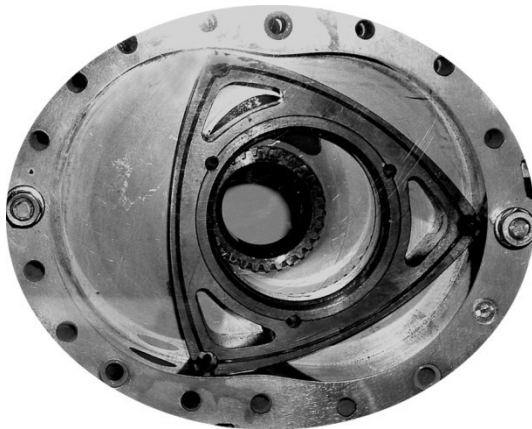


Abb. 6: Schnitt durch einen Wankelmotor

Didaktische Bemerkungen zur Generierung der Trochoide mit Schülern der SI

Im speziellen Fall der Epitrochoide im Wankelmotor überlagern sich zwei Drehungen. Jede für sich lässt sich durch entsprechende Drehwinkel hinreichend beschreiben. Den Zusammenhang zwischen den beiden Drehwinkeln herzustellen, ist das eigentliche Problem.

Das Problem wird dadurch verschärft, dass man Bogenlängen betrachten muss. In seiner Arbeit mit Schülern und Studierenden für ein Lehramt musste der Autor immer wieder die zumindest hinsichtlich der Studierenden erschütternde Erfahrung machen, dass die Verwendung von Kreisbogenlängen und Winkelgrößen in Bogenmaß eine, gelinde gesagt, gewisse Hürde darstellt.

Ein vorschneller Übergang zu einer geschlossenen Parameterdarstellung, wie er etwa häufig in Publikationen zu Rollkurven angestrebt wird, verbietet sich damit. Wankels Abneigung gegen Formeln mathematikdidaktisch positiv umsetzend, sollte auf eine solche geschlossene Darstellung in der SI überhaupt verzichtet werden. Die verwendeten Werkzeuge DGS und Tabellenkalkulation erlauben nicht nur, sondern fordern modulares Arbeiten geradezu heraus. Eine Generierung der Trochoide auf der Basis zweier Module erzeugt die Kurve ebenso, wie die Verwendung einer in sich geschlossenen Parameterdarstellung.

Bei aller Vereinfachung bleibt die Verwendung zweier Parameter. Diesbezüglich reicht es aus, von Drehwinkeln zu sprechen. Es wird sich zeigen, dass bei der Verwendung von DGS diese Winkel im Gradmaß sein können. Ihre gemeinsame Abhängigkeit ist das eigentlich zu lösende Problem. Das Problem vereinfacht sich, wenn es nicht deduktiv, sondern empirisch induktiv gelöst wird. Der übernächste Abschnitt wird dieses verdeutlichen.

Wenn auch der Zusammenhang der beiden Drehwinkel das schwierigste der zu lösenden Probleme ist, wäre es doch unehrlich, alles andere als trivial abzutun. Ein weiteres Problem tut sich dadurch auf, dass der Mittelpunkt des abrollenden Kreises sich auf einem Kreis bewegt, der im Wankelmotor materiell gar nicht existiert. Wir wollen ihn im Folgenden deshalb den „virtuellen Kreis“ nennen. Der folgende Abschnitt zeigt, wie die Schüler diesen virtuellen Kreis entdecken können.

Die Entdeckung des virtuellen Kreises

Auch wenn Motormodelle recht anschaulich und Computeranimationen zur Generierung von Rollkurven recht instruktiv sind: auf die, wie der Österreicher sagt, „händische“ Erzeugung von Rollkurven außerhalb jeglicher Elektronik sollte und darf nicht verzichtet werden. Letzteres lässt sich mit einem Spirographen bewerkstelligen.³

Speziell müssen die Schüler bei diesen Experimenten untersuchen, auf welcher Kurve sich der Mittelpunkt des abrollenden Kreises bewegt. Das Ergebnis Kreis bleibt trotz aller Konkretheit des Spirographen eine Vorstellung in den Köpfen der Schüler.

Konkreter wird er durch den Einsatz eines DGS. Mit diesem konstruieren wir zunächst den kleinen Kreis k , auf dem der große Kreis K abrollt. Wir haben ja bereits untersucht, dass die Radien dieser beiden Kreise sich wie 2:3 verhalten. Es liegt nahe, für den Radius r von k 2 cm festzulegen.

K und k haben genau einen Berührungspunkt B und damit in B genau eine gemeinsame Tangente t . Diese Tangente steht senkrecht auf dem Berührungsradius. Der Mittelpunkt M von K liegt damit auf dem Strahl BO^+ und zwar im Abstand von 3 cm zu B . Eine Animation von B auf k zeigt bei gleichzeitigem Tracing von M den gesuchten Kreis. Logischerweise hat er einen Radius von 1 cm.

Abbildung 7 zeigt das Ergebnis der Animation von B auf k . Leicht ist man jetzt geneigt, in eine Sackgasse zu laufen: Eigentlich bräuchte man doch nur das Reuleaux-Dreieck als Kind des Kreises K zu konstruieren, einen Eckpunkt dieses Dreiecks als Tracingpunkt festzulegen, B zu animieren – und schon beschreibt der gewählte Eckpunkt die gewünschte Kurve.

Zum entdeckenden Lernen⁴ gehört auch, auf Irrwege zu geraten. Lassen wir sie also zu. Nichts hilft mehr, als eigene Fehler zu erkennen. Abbildung 8 holt uns auf den Boden der Tatsachen zurück. Leider berücksichtigen DGS nicht die physikalischen Gesetze der Reibung. Das Reuleaux-Dreieck dreht sich somit nicht um M , sondern mit M und B nur um O .

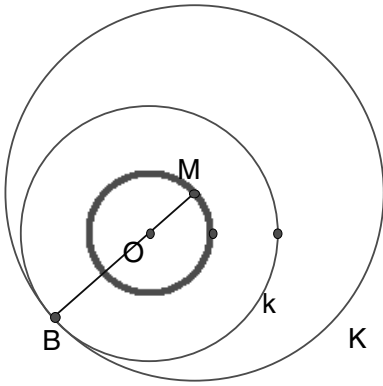


Abb. 7: „Virtueller Kreis“
(vgl. Farbbild 18)

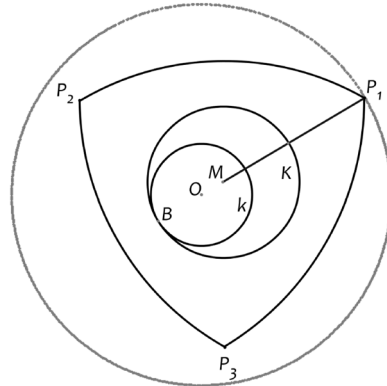


Abb. 8: Ein Fehlversuch zur Generierung
der Epitrochoide (vgl. Farbbild 19)

Die Berücksichtigung der Reibung zwischen den beiden Kreisen bedeutet, die Drehung des Reuleaux-Dreiecks um M selbst zu organisieren. Der Leser merkt, dass wir am „Knackpunkt“ des Problems angekommen sind. Der Zusammenhang zwischen dem Drehwinkel der Drehung von M um O und dem des Reuleaux-Dreiecks um M muss untersucht werden. Hierzu wird von uns eine bereits fertige Datei eingesetzt, welche die Schüler bezüglich der genannten Drehwinkel genauer untersuchen.

Untersuchung des Zusammenhangs der beiden Drehwinkel

Den Schülern wird eine Datei zum Experimentieren bereit gestellt.⁵ Diese könnte so gestaltet sein, dass die Schüler durch systematisches Probieren versuchen, das richtige Verhältnis der beiden Drehwinkel zu finden. Für diesen Artikel wurde jedoch eine Applikation in Betracht gezogen, die bereits das richtige Verhältnis implementiert hat. Den Schülern obliegt es nun, dieses Verhältnis zu erkennen. Mit α sei der Drehwinkel von M um O bezeichnet. Die Schüler stellen verschiedene Werte für α ein, drucken die entsprechende Konstellation aus und messen auf dem Ausdruck geeignete Winkel.⁶

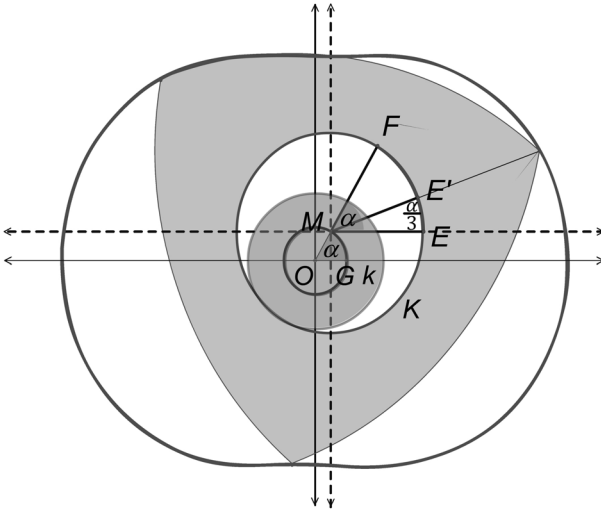


Abb. 9: Empirische Bestimmung des Verhältnisses der beiden Drehwinkel (vgl. Farbbild 20)

Entsprechend der Bezeichnungen in Abbildung 9 ergeben sich folgende Zusammenfassungen der empirischen Untersuchung.

- Der Winkel $\alpha = \angle GOM$, den der Mittelpunkt M von K auf dem virtuellen Kreis überstreicht, ist nach dem Stufenwinkelsatz kongruent zum Winkel $\angle EMF$.
- Der Kreis K führt beim Abrollen eine weitere Drehbewegung aus: Er dreht sich um seinen eigenen Mittelpunkt. Der Punkt P_1 macht diese Drehbewegung mit. Der Drehwinkel ist der Winkel $\angle EME'$.
- Unsere Messungen ergeben, dass die Größe von $\angle EME'$ gerade der dritte Teil vom Drehwinkel α ist.

Natürlich wurde das Verhältnis der beiden Drehwinkel an keiner Stelle bewiesen. Für die SI ist das gezeigte Vorgehen jedoch durchaus legitim.⁷ Es ist an der Zeit, dass die Schüler die Trochoide mittels einer selbst erstellten Applikation generieren.

Generierung der Epitrochoide mit einem DGS

Zunächst wird der virtuelle Kreis konstruiert, auf dem sich der Mittelpunkt von K bewegt. Es bietet sich an, die Mittelpunktslage mit dem Radius 1 cm zu wählen. Für die Drehung des Mittelpunktes M auf diesem Kreis legen wir zunächst einen Parameter α in Grad fest. M erhalten wir dadurch, dass ein Punkt des virtuellen Kreises einer Drehung um den Koordinatenursprung mit dem Drehwinkel α unterworfen wird. Um M wird nun ein Kreis mit dem Radius 3 cm generiert. Auf K legen wir einen Punkt C fest. Wir berechnen

einen zweiten Drehwinkel zu $\frac{\alpha}{3}$. Den Punkt C unterwerfen wir einer Drehung um M mit dem Drehwinkel $\frac{\alpha}{3}$ und erhalten den Bildpunkt C' . Schließlich wird der Strahl MC' generiert. Ein geeigneter Punkt P auf diesem beschreibt per Tracing bei der Animation des Parameters α die Epitrochoide (Abbildung 10).

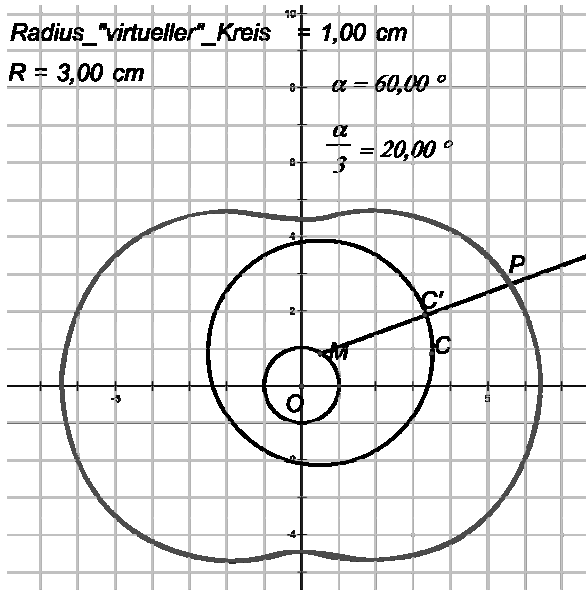


Abb. 10: Generierung des „Wankelmotorgehäuses“ mittels Sketchpad (vgl. Farbbild 21)

Begründung des Verhältnisses der beiden Drehwinkel

Nach diesen Versuchen sollten die Schüler genügend Einblick in die Generierung der Kurve gewonnen haben, um das Verhältnis der beiden Drehwinkel begründen zu können:

Wir beziehen uns im Folgenden wieder auf Abbildung 9. Der Kreis K rollt auf dem Kreis k ab. Dieses passiert ohne Schlupf, was in der Realität durch die Zahnräder gewährleistet wird. Das bedeutet, dass bei ein und demselben Drehwinkel α auf beiden Kreisen dieselbe Bogenlänge s überstrichen wird. Auf dem Kreis k entspricht dieser Bogenlänge s der Winkel α . Da sich die Radien der beiden Kreise K und k wie 2:3 verhalten, hat auf K der s entsprechende Drehwinkel eine Größe von $\frac{2}{3}\alpha$. Dieses scheint ein Widerspruch zu sein, da wir ja $\frac{1}{3}\alpha$ für diesen Drehwinkel empirisch bestimmt

sprach zu sein, da wir ja $\frac{1}{3}\alpha$ für diesen Drehwinkel empirisch bestimmt

hatten. Dieser Widerspruch löst sich durch die Berücksichtigung der Drehrichtung auf. Die Drehrichtung von M auf dem virtuellen Kreis und die Drehrichtung von K um M sind wegen des Abrollens von K auf k entgegengesetzt. Die Größe des Drehwinkels $\angle EME'$, mit dem wir ja bisher die Drehung von K um M beschrieben haben, berechnet sich damit wie

$$\text{folgt: } |\angle EME'| = |\angle EMF| - |\angle E'MF| = \alpha - \frac{2}{3}\alpha = \frac{\alpha}{3}.$$

Übergang zur analytischen Darstellung der Epitrochoide mittels DGS

Ein Projekt für die SI und dann analytische Geometrie? Man assoziiert sofort den Begriff Parameterdarstellung und gerade die sollte ja im Projekt laut der vorangegangenen didaktischen Bemerkungen keine Rolle spielen. Wozu auch, die Trochoide wurde durch die Schüler generiert. Das Hauptproblem der Konstruktion einer stilisierten Darstellung des Wankelmotors ist gelöst. Alles weitere sollte machbar sein. Natürlich kann man sich mit dem Erreichten bezüglich der Zykloide zufrieden geben. Zwei Gründe sprechen dafür weiter zu machen:

Die mittels des DGS erzeugte Kurve überzeugt nicht in ihrer Qualität. Während alle sonstigen Objekte in der DGS-Zeichnung Vektorobjekte sind, bleiben die getrackten Objekte Pixelgrafiken. Diese sind nicht verlustfrei zu skalieren, ihre Materialisierung mittels eines Druckers wird „pixelig“ ausfallen. Abhilfe könnte eine diesbezügliche Vektorgrafik schaffen. Für die SI bietet sich die Verwendung eines Tabellenkalkulationssystems an. Eine gewisse Auswahl von Stützpunktkoordinaten wäre zu berechnen. Aus diesen lässt sich ein Punktdiagramm erstellen. Die in diesem generierte Kurve kann wie ein jedes anderes Vektorobjekt (wmf) durch Kopieren und Einfügen weiter verwendet werden.

Die Schüler verfügen über das notwendige mathematische Wissen, um die Berechnung der Stützpunkte verstehen zu können. Sicherlich wird es nötig sein, diesbezüglich die Winkelfunktionen am Einheitskreis noch einmal zu thematisieren. Wenn schon ein fächerübergreifendes Projekt in Angriff genommen wird, sollte man dann nicht auch versuchen, mathematisch fachgebietsübergreifend zu arbeiten?

Nach einer, wie bereits erwähnt, notwendigen Vorbetrachtung zu den Winkelfunktionen am Einheitskreis lassen sich die folgenden Überlegungen zur Berechnung von Stützpunktkoordinaten unserer Trochoide anstellen:

Der Punkt M bewegt sich auf einem Einheitskreis. Jede Lage von M auf dem Einheitskreis ist durch den jeweiligen Wert des Drehwinkels α eindeutig bestimmt. M hat damit die Koordinaten $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$. Der Punkt P_1 bewegt sich auf einem Kreis um M . Sein Drehwinkel um M ist der dritte Teil von α . Wäre der Kreis um M , auf dem sich P_1 bewegt, ein Einheitskreis, so

würde für seine Koordinaten $\left(\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right), \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right)$ gelten. Nun bewegt sich

P_1 jedoch nicht auf einem Einheitskreis um M sondern hat z.B. 5 cm Abstand zu M . Elementare Überlegungen ergeben damit die folgenden

Koordinaten für P_1 : $\left(5\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right), 5\sin\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right)$. Die Überlagerung der beiden

Drehbewegungen entspricht einer Addition der Koordinaten von M und P_1 .

Genau diese Überlegungen lassen sich mittels Sketchpad modular umsetzen. Die Bezugnahme auf bereits vorhandene Ausdrücke erfolgt (in gewisser Weise enaktiv) durch Zeigen mit der Maus auf das gewünschte Formelobjekt. Sketchpad selbst setzt die algebraischen Ausdrücke zusammen. Am Ende ist praktisch nebenbei die Parameterdarstellung der Trochoide entstanden, ohne dass wir sie explizit angesprochen haben. Der interessierte Leser kann sich auf der Internetsite des Autors eine entsprechende Sketchpaddatei „trochoide_analytisch.gsp“ herunterladen. Der wesentliche Inhalt der Datei sei hier vorgestellt:

| | Drehwinkel | x-Koordinate | y-Koordinate |
|----------------|------------------------------|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| Drehung um O | $\alpha = 0^\circ$ | $\cos(\alpha) = 1$ | $\sin(\alpha) = 0$ |
| Drehung um M | $\frac{\alpha}{3} = 0^\circ$ | $5 \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) = 5$ | $5 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) = 0$ |
| Überlagerung | | $\cos(\alpha) + 5 \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) = 6$ | $\sin(\alpha) + 5 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) = 0$ |

Die x- und die y-Koordinate der Überlagerung werden nun markiert, und per Plot $As(x,y)$ wird der entsprechende Punkt im Koordinatensystem grafisch dargestellt. Diesen Punkt unterwirft man wiederum einem Tracing und animiert nun den Parameter α . Die gewünschte Kurve entsteht. Wiederum leider nur als Pixelgrafik. Abhilfe schafft jetzt die Tabellenkalkulation.

Generierung der Epitrochoide mittels eines Tabellenkalkulationssystems

Die Überlegungen des vorangegangenen Abschnitts lassen sich „1 zu 1“ in einer Tabellenkalkulationsdatei umsetzen. Zu beachten ist lediglich, dass die Funktionen Sinus und Cosinus Argumente in Bogenmaß erwarten. Diesbezüglich hilft die gleichnamige Excelfunktion. Abbildung 11 zeigt eine mit Excel generierte Epitrochoide.

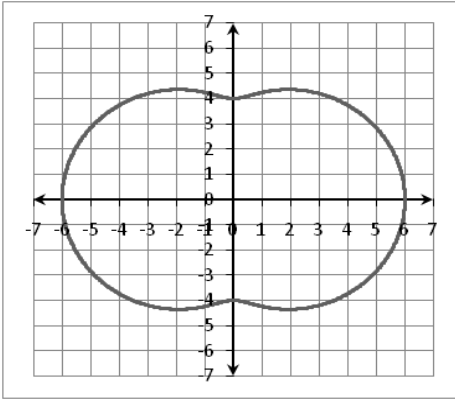


Abb. 11: mit Excel generierte Epitrochoide

Die zugehörige Exceltabelle erklärt sich von selbst:

| | A | B | C |
|----|-----------------|----------------------|-----------------|
| 1 | Radius von k | $r =$ | 2 |
| 2 | Radius von K | $R =$ | 3 |
| 3 | Radius virtuell | $r_v =$ | =C2-C1 |
| 4 | $ P_jM $ | $d =$ | 5 |
| 5 | | α in Grad | 0 |
| 6 | Drehwinkel | α in Bogenmaß | =BOGENMASS(C5) |
| 7 | | $1/3\alpha$ | =C6/3 |
| 8 | | x_M | =\$C\$3*COS(C6) |
| 9 | Drehung um O | y_M | =\$C\$3*SIN(C6) |
| 10 | | x_P | =\$C\$4*COS(C7) |
| 11 | Drehung um M | y_P | =\$C\$4*SIN(C7) |
| 12 | | $x_M + x_P$ | =C10+C8 |
| 13 | Überlagerung | $y_M + y_P$ | =C11+C9 |

Abschließende Bemerkungen

Es liegt in der Natur der Sache, dass ein Projekt wie das vorgestellte im Rahmen eines einzelnen Artikels nur „angerissen“ werden kann. Selbst hinsichtlich der möglichen geometrischen Fragestellungen musste sich der Autor in Verzicht üben. Nicht angerissen werden konnte das Experimentieren mit der Vielfältigkeit von Rollkurven.⁸ Diesbezüglich sei auf existierende Veröffentlichungen zu Rollkurven verwiesen. Demgegenüber wurde hier versucht, dem methodischen Herantasten an die beiden „Knack-

punkte“ hinsichtlich des Verständnisses zur Kurvengenerierung mehr methodische Aufmerksamkeit zu gewähren:

- Finden des „virtuellen“ Pfades, auf dem sich der Mittelpunkt des abrollenden Kreises bewegt und
- empirische Untersuchung des Zusammenhanges der beiden Parameter, welche die beiden sich überlagernden Bewegungen bestimmen.

Vollkommen zu kurz kommen mussten auch Untersuchungen zu den geometrischen Eigenschaften der Reuleaux-Dreiecke. Dieses wäre dann aber doch „ein zu weites Feld“ gewesen. Allerdings auch ein höchst interessantes.

Anmerkungen

¹ Der Wert einer solchen Darstellung für die Vorstellung der Projektergebnisse liegt auf der Hand.

² Heute kann man eine DKM 54 als Leihgabe des Landesmuseums für Technik und Arbeit Mannheim im Deutschen Museum Bonn besichtigen: <http://www.deutsches-museum.de/bonn/sammlungen/tradition-vision/01/02/dkm-54/>

³ Leider sehen nicht viele Spirographen das Abrollen eines Kreises auf einem kleineren Kreis vor, der innerhalb des abrollenden Kreises liegt. Fündig wird man vor allem bei Ebay in den USA, wo eigentlich ständig Spirographen aus den 60er Jahren angeboten werden.

⁴ In der Pädagogik setzt man gern noch eins drauf: aktiv-entdeckendes Lernen. Was bringt diese pseudowissenschaftliche Doppelattributierung? Gibt es vielleicht auch „passiv-entdeckendes“ Lernen? Oder gar „passiv-versteckendes“ Lernen?

⁵ Der Leser kann sich eine solche wie auch die weiteren für diesen Artikel erstellten Applikationen auf der Internetsite des Autors herunterladen.

⁶ Natürlich kann die Winkelmessung auch durch das DGS übernommen werden. Die Variante des unmittelbaren Messens durch die Schüler selbst dürfte aber noch stärker zum Verständnis beitragen.

⁷ Beim Beweisen eines Satzes wird man auch zunächst, wenn dieses möglich ist, zunächst den Satzinhalt mittels verschiedener heuristischer Strategien erarbeiten und erst dann nach einem Beweis für den Satz suchen. Lediglich in dem Fall, dass der Satz nur durch deduktive Methoden gefunden werden kann, wird man die deduktive Vorgehensweise verwenden.

⁸ Kann die Epitrochoide des Wankelmotors auch in der „üblichen“ Art der Erzeugung von Epizykloiden generiert werden? (Der Kreis, auf dem abgerollt wird, befindet sich nicht innerhalb des abrollenden Kreises.)

Literatur

Becker, Sascha / Meysen, Fried / Möser, Kurt (2002). *Felix Wankel – Leben und Werk in Bildern. Zum 100. Geburtstag von Felix Wankel*. Wartberg.

Busse, Axel (2007). Ein klassischer Tüftler. *Rhein-Neckar-Zeitung, Heidelberg*, 11./12. August 2007.

Krause, Julia (2004). *Rollkurven und ihre Didaktik*, Schriftliche Hausarbeit im Rahmen der ersten Staatsprüfung für das Lehramt für die Sekundarstufe II. Bonn.

Laakmann, Heinz (2007). Der Break Dancer – Eine komplexe Bewegung modellieren. *Mathematik Lehren* 148, 50–53.

Nicol, Mathias (1987). *Potenzen beim Arbeiten mit Kurven und deren Gleichungen hinsichtlich einer Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts der Abiturstufe in der Deutschen Demokratischen Republik*. Dissertation A. Humboldt-Universität zu Berlin, Fachbereich Mathematik.

Weth, Thomas (1993). *Zum Verständnis des Kurvenbegriffs*. Hildesheim, Berlin.

URL

Museum Autovision in Altlußheim:

<http://www.autovision-tradition.de/autovision/>

Alles rund um den Wankelmotor:

<http://www.der-wankelmotor.de>

Weitere Links und Materialien zu diesem Artikel:

<http://www.ph-heidelberg.de/wp/gieding/forschung/wankel/>

Andreas Filler
Pädagogische Hochschule Heidelberg

Bézierkurven und -flächen: eine Verbindung von Geometrie, Analysis, Informatik und Automobilkonstruktion

Summary

Bézier curves and surfaces became highly important for construction and design. They were developed by DE CASTELJAU and BÉZIER for the car industry as a construction tool. After the introduction of an elementary algorithm to construct Bézier curve segments, a parametric equation will be derived. Properties of these segments and compound curves as well as surfaces will be discussed. Finally a car will be constructed using Bézier surfaces. Because this car is continuously differentiable only one time, a way will be shown to construct an (at least) two time continuously differentiable car (which means a car of the class C_2). This is possible using NURBS (non uniform rational B-Spline) surfaces.

Grußwort

Lieber Herr Ast, zu Ihren besonderen Interessen gehören die Analysis, die Lineare Algebra sowie die angewandte Mathematik – aber auch Automobile. Im Folgenden werde ich versuchen, diese Interessengebiete zusammenzubringen. Dabei kann ich nicht darauf verzichten, zwei Disziplinen einzubeziehen, für die Sie sich nicht so sehr interessieren: die Elementargeometrie und die Informatik. Aber Sie werden sehen, bald komme ich auf „solide“ Inhalte zu sprechen und auch die wahren Qualitäten von Autos, nämlich die Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften ihrer Karosserien, werden behandelt.

Bekanntlich haben Sie mit Autos nicht immer die allerbesten Praxiserfahrungen gemacht. Aber hier soll es um grundsätzliche Werte gehen und die erschließen sich bekanntlich über mathematische Beschreibungen und Eigenschaften. In dieser Hinsicht fuhren Sie etliche Jahre (wenn ich Sie richtig verstanden habe, von 1965 bis 1977) insgesamt vier Automobile der damals sehr innovativen Firma Renault. In Ihre Autos (noch nicht in die beiden R4, aber in die Renault 10 und 16) sind bereits Ergebnisse einer Entwicklung eingeflossen, die in den folgenden Jahrzehnten Konstruktion und Design in unzähligen Bereichen revolutionieren und bestimmen sollte.

Bézierkurven

Bézierkurven (und auch -flächen) entstanden aus den Bedürfnissen der Automobilindustrie nach computerunterstützten Entwurfsmöglichkeiten für Karosserien heraus und wurden von DE CASTELJAU (1959 bei Citroën, zunächst ohne Veröffentlichung) und BÉZIER (1961 bei Renault) unabhängig voneinander entwickelt. Sie erlangten in den folgenden Jahrzehnten Bedeutung in den unterschiedlichsten Bereichen. So sind beispielsweise die Fonts (Schriftzeichen), die in heutigen Computern zur Bildschirmdarstellung und zum Ausdruck von Dokumenten verwendet werden, Bézierkurven.

Von DE CASTELJAU wurde der im Folgenden beschriebene Algorithmus angegeben, um eine durch $n+1$ Kontrollpunkte beschriebenen Kurve zu erzeugen. Es dazu seien Punkte P_0, \dots, P_n und $t \in \mathbf{R}$ mit $0 \leq t \leq 1$ gegeben.

- Die Strecken $\overline{P_k P_{k+1}}$ ($0 \leq k \leq n-1$) werden im Verhältnis t geteilt, wobei n Teilungspunkte Q_0, \dots, Q_{n-1} , entstehen (siehe Abbildung 1).
- Die Strecken $\overline{Q_k Q_{k+1}}$ ($0 \leq k \leq n-2$) werden nun ebenfalls im Verhältnis t geteilt. Es entstehen $n-1$ Teilungspunkte R_0, \dots, R_{n-2} , welche Strecken $\overline{R_k R_{k+1}}$ (mit $0 \leq k \leq n-3$) bilden, die wiederum im Verhältnis t geteilt werden ... und so weiter.

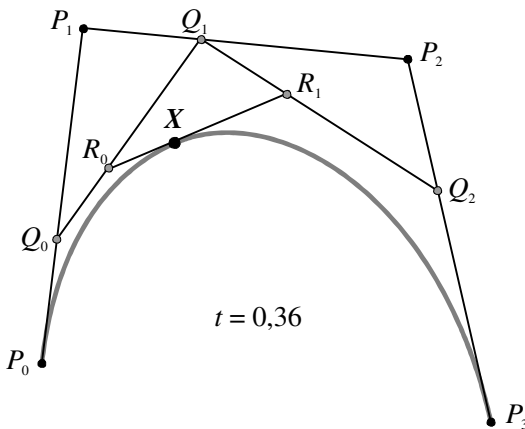


Abb. 1: DE-CASTELJAU-Algorithmus

Nach $n-1$ Schritten bricht das Verfahren ab, es entsteht nur noch ein Teilungspunkt X . Die Kurve, welche X beschreibt, wenn t das Intervall $[0;1]$ durchläuft, wird als *Bézierkurve* bezeichnet. Der erste und der letzte Kontrollpunkt P_0 und P_n sind Punkte der Kurve, die Vektoren $\overline{P_0 P_1}$ und $\overline{P_n P_{n-1}}$ Tangentenvektoren an die Kurve in diesen Punkten.

Durch Verschieben der Punkte P_0 und P_n sowie Veränderung der Tangentenvektoren durch „Ziehen“ an den „Anfassern“ P_1 und P_{n-1} lassen sich Bézierkurven interaktiv formen.

Die bisherigen Überlegungen waren rein elementargeometrischer Natur. Sie lassen sich sehr leicht mit einer dynamischen Geometriesoftware nachvollziehen. So wurde Abbildung 1 mithilfe der Software Geometer's Sketchpad erzeugt (unter <http://www.afiller.de/bezier> steht die entsprechende Datei zur Verfügung). Allerdings reicht die elementargeometrische Betrachtungsweise nicht mehr aus, wenn weitergehende Überlegun-

gen zu Eigenschaften von Bézierkurven (und später -flächen) angestellt werden sollen, z. B. zur Differenzierbarkeit. Hierzu wird eine analytische Beschreibung benötigt.

Die folgende Herleitung einer Parameterdarstellung für Bézierkurven beschränkt sich auf Bézierkurven mit 4 Kontrollpunkten ($n = 3$), da sich diese – wie sich zeigen wird – durch Polynome 3. Grades beschreiben lassen und deshalb in der Computergrafik und im computergestützten Entwurf (CAD) fast ausschließlich verwendet werden. Die Gründe dafür bestehen darin, dass quadratische Funktionen keine genügend flexible Steuerung der Kurvenform ermöglichen und Polynome höherer Ordnung sowohl rechenintensiv als auch recht instabil sind (d. h. es können bei geringen Variationen der Kontrollpunkte starke Änderungen der Kurvenform auftreten).

Die durch den DE-CASTELJAU-Algorithmus erzeugten Punkte X einer Bézierkurve (siehe Abbildung 1) lassen sich durch die Ortsvektoren

$$\vec{x} = \vec{r}_0 + t \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_0) = (1-t) \cdot \vec{r}_0 + t \cdot \vec{r}_1$$

beschreiben. Analog gilt

$$\begin{aligned} \vec{r}_0 &= (1-t) \cdot \vec{q}_0 + t \cdot \vec{q}_1, & \vec{r}_1 &= (1-t) \cdot \vec{q}_1 + t \cdot \vec{q}_2, \\ \vec{q}_0 &= (1-t) \cdot \vec{p}_0 + t \cdot \vec{p}_1, & \vec{q}_1 &= (1-t) \cdot \vec{p}_1 + t \cdot \vec{p}_2 \quad \text{und} \\ \vec{q}_2 &= (1-t) \cdot \vec{p}_2 + t \cdot \vec{p}_3. \end{aligned}$$

Durch jeweiliges Einsetzen der Gleichungen für \vec{q}_i in diejenigen für \vec{r}_i und schließlich der beiden resultierenden Gleichungen in die Darstellung von \vec{x} ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{x} &= (1-t)^3 \cdot \vec{p}_0 + 3t(1-t)^2 \cdot \vec{p}_1 + 3(1-t)t^2 \cdot \vec{p}_2 + t^3 \cdot \vec{p}_3 \\ &= \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} t^i (1-t)^{3-i} \cdot \vec{p}_i = \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) \cdot \vec{p}_i. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten $B_{i,3}$ werden als Bernsteinpolynome (nach S. N. BERNSTEIN) bezeichnet. Für Bézierkurven mit $n+1$ Kontrollpunkten lässt sich völlig analog herleiten:

$$\vec{x} = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \cdot \vec{p}_i \quad \text{mit} \quad B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}. \quad (1)$$

Zu den wichtigsten Eigenschaften von Bézierkurven zählt die bereits erwähnte Tatsache, dass die Verbindungsvektoren der jeweiligen beiden äußeren Kontrollpunkte Tangentenvektoren in den Endpunkten der Kurve sind. Weiterhin ist zu erwähnen, dass alle Punkte der Kurve innerhalb der konvexen Hülle des durch die Kontrollpunkte gebildeten Polygons liegen.¹

Durch Zusammensetzen mehrerer der bisher betrachteten Bézierkurvenstücke mit kollinearen Tangentenvektoren in gemeinsamen Kontrollpunkten

entstehen Bézierkurven mit beliebig vielen Kontrollpunkten und „Anfasern“ für Tangentenvektoren (siehe Abbildung 2).

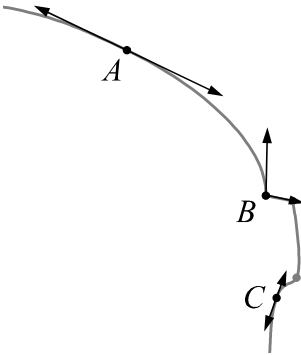


Abb. 2: Aus Kurvenstücken zusammengesetzte Bézierkurve mit Tangentenvektoren

Wird darüber hinaus gefordert, dass in den Übergangspunkten P_k zweier Kurvenstücke für die Tangentenvektoren $\overrightarrow{P_k P_{k-1}}$ und $\overrightarrow{P_k P_{k+1}}$ der Kurvenstücke $\overrightarrow{P_k P_{k-1}} = -\overrightarrow{P_k P_{k+1}}$ bzw. $\overrightarrow{P_{k-1} P_k} = \overrightarrow{P_k P_{k+1}}$ gilt, so sind die zusammengesetzten Kurven in allen Punkten stetig differenzierbar; es handelt sich in diesem Falle also um Kurven der Differenzierbarkeitsklasse C_1 . Die zusammengesetzte Bézierkurve in Abbildung 2 ist in A stetig differenzierbar, in B natürlich nicht. In C lässt sich die stetige Differenzierbarkeit durch eine geeignete Umparametrisierung erreichen.

Es stehen nun alle Voraussetzungen zur Verfügung, um ein erstes Automobil zu konstruieren – zunächst allerdings nur im Zweidimensionalen.

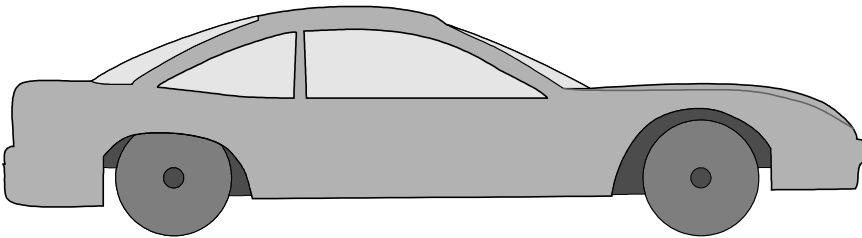


Abb. 3: Automobilkonstruktion mithilfe von Bézierkurven

Mit Ausnahme der Räder wurde das in Abbildung 3 dargestellte Automobil ausschließlich mithilfe von Bézierkurven konstruiert, wobei sowohl stetig differenzierbare Übergänge zwischen Kurvenstücken als auch „Ecken“ zum Einsatz kamen (siehe als Beispiel hierzu den in Abbildung 2 dargestellten Ausschnitt aus der Front der Karosserie). Der Hauptteil der Karosserie benötigt nur 30 erzeugende Kurvenpunkte (siehe Abbildung 4) und dazu 60 Kontrollpunkte für die Tangentenvektoren (in der Abbildung wurden lediglich die Kontrollpunkte für die Tangenten an die Kurve in den Punkten $P_1(14,6;12,5)$, $P_2(23,0;14,0)$ und $P_3(29,8;13,3)$ markiert). Ein geschickter Designer wäre sicherlich mit noch weniger Kontrollpunkten ausgekommen. Um möglichst einfach und flexibel Veränderungen an Entwürfen vornehmen zu können, ist es in frühen Entwurfsstadien sinnvoll, möglichst wenige Kontrollpunkte zu verwenden.

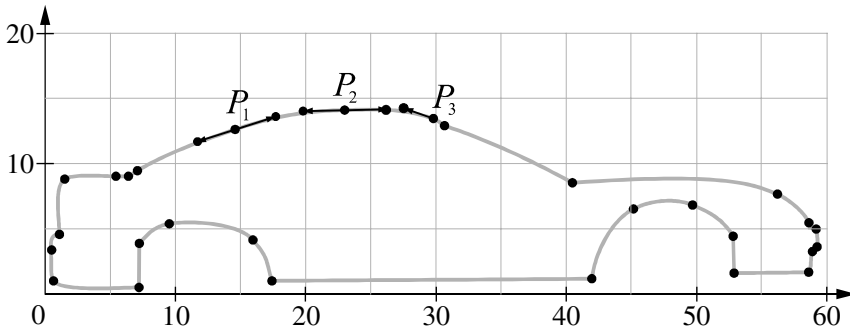


Abb. 4: Kurven- und ausgewählte Kontrollpunkte der Karosserie

Mit den festgelegten Kurven- und Kontrollpunkten lässt sich die Karosserie in einem interaktiven Zeichenprogramm oder in einer Beschreibungssprache wie Metapost durch Eingabe der Koordinaten zeichnen:

```
draw .. (14.6,12.5)..controls (12.0,11.6) and (17.2,13.4)
    .. (23.0,14.0)..controls (20.1,13.8) and (25.9,14.2)
    .. (29.8,13.3)..controls (27.4,14.1) and (30.1,13.9)
    und so weiter für die verbleibenden 28 Kurvenstücke
```

Als Parameterdarstellung des durch P_1 und P_2 begrenzten Kurvenstückes ergibt sich nach (1):

$$x_{12}(t) = -0,3 \cdot t^3 + 0,9 \cdot t^2 + 7,8 \cdot t + 14,6$$

$$y_{12}(t) = 0,3 \cdot t^3 - 1,5 \cdot t^2 + 2,7 \cdot t + 12,5$$

Für das durch P_2 und P_3 begrenzte Kurvenstück erhalten wir:

$$x_{23}(t) = 2,3 \cdot t^3 - 4,2 \cdot t^2 + 8,7 \cdot t + 23,0$$

$$y_{23}(t) = -0,4 \cdot t^3 - 0,9 \cdot t^2 + 0,6 \cdot t + 14,0$$

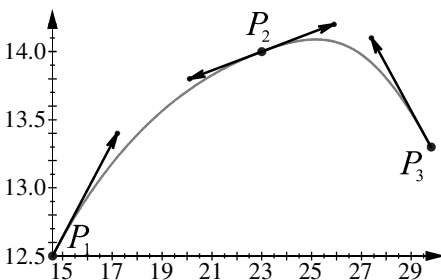


Abb. 5: Ausschnitt des Daches

Abbildung 5 zeigt einen (vergrößerten und in y-Richtung gestreckten) Ausschnitt des Daches der in den Abbildungen 3 und 4 dargestellten Karosserie, der genau die beiden angegebenen Kurvenstücke umfasst. Anhand der Tangentenvektoren in P_2 liegt bereits die Vermutung nahe, dass die Kurve in diesem Punkt stetig differenzierbar ist.

Diese Vermutung lässt sich leicht durch Ableiten der oben angegebenen Parameterdarstellungen bestätigen:

$$\frac{d}{dt} x_{12}(t) = -0,9 \cdot t^2 + 1,8 \cdot t + 7,8$$

$$\frac{d}{dt} x_{23}(t) = 6,9 \cdot t^2 - 8,4 \cdot t + 8,7$$

$$\frac{d}{dt} y_{12}(t) = 0,9 \cdot t^2 - 3,0 \cdot t + 2,7 \quad \frac{d}{dt} y_{32}(t) = -1,2 \cdot t^2 - 1,8 \cdot t + 0,6 .$$

In dem Kurvenstück zwischen P_1 und P_2 ist der Punkt P_2 dem Parameterwert $t=1$, in dem Kurvenstück zwischen P_2 und P_3 dem Wert $t=0$ zugeordnet. Durch Einsetzen erhalten wir

$$\left. \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_{12}(t) \\ y_{12}(t) \end{pmatrix} \right|_{t=1} = \left. \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_{23}(t) \\ y_{23}(t) \end{pmatrix} \right|_{t=0} = \begin{pmatrix} 8,7 \\ 0,6 \end{pmatrix}$$

und haben somit (zumindest teilweise) ein Dach der C_1 -Klasse.

Konstruktion von Flächen und Körpern aus Kurven

Ein Automobil kann als zweidimensionales Objekt noch keinen großen Nutzen entfalten. Das Ziel des nächsten Schrittes muss also darin bestehen, ein „wirkliches“, also dreidimensionales, Auto zu konstruieren, wozu die in der Ebene durchgeführten Überlegungen und Konstruktionsschritte genutzt werden sollen.

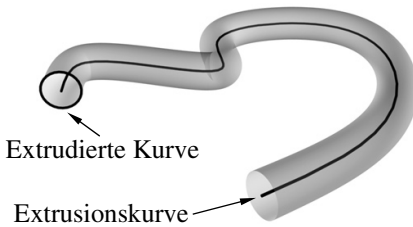


Abb. 6: Extrusion

Eine häufig verwendete Möglichkeit der Modellierung räumlicher Objekte besteht darin, Flächen durch Extrusion von (meist geschlossenen) Kurven zu erzeugen; hierbei wird eine Kurve an einer anderen Kurve (der Extrusionskurve) entlang „gezogen“; Abbildung 6 zeigt die Extrusion eines Kreises entlang einer Bézierkurve.

Ebenfalls häufig anzutreffende Beispiele für die Konstruktion räumlicher Objekte aus Kurven sind Rotationsflächen bzw. -körper,² die durch Extrusion von Kurven entlang von Kreisen entstehen. Rotationsflächen sind somit spezielle Extrusionsflächen; gleichzeitig können sie als Flächen aufgefasst werden, die durch Rotation einer Kurve um eine Achse entstehen.

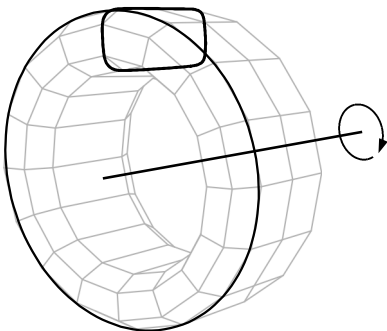


Abb. 7: Rotationsfläche

Die Achse einer Rotationsfläche verläuft durch den Mittelpunkt des Extrusionskreises und ist senkrecht zu der Ebene durch diesen Kreis.

Besonders gut eignen sich Rotationsflächen natürlich für die Konstruktion von Autoreifen, siehe Abbildung 7. Hierzu wurde eine Bézierkurve (die den Querschnitt eines Reifens darstellen soll) rotiert.

Analytisch lässt sich eine Fläche, die durch Drehung einer Kurve mit der Parameterdarstellung

$$\vec{p}(v) = \begin{pmatrix} x_K(v) \\ y_K(v) \end{pmatrix}; \quad v \in [v_1; v_2]$$

um die y -Achse entsteht, durch die Parameterdarstellung

$$\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_K(v) \cdot \cos(u) \\ y_K(v) \\ x_K(v) \cdot \sin(u) \end{pmatrix}; \quad u \in [0; 2\pi[, \quad v \in [v_1; v_2]$$

beschreiben.

Eine verallgemeinerte Vorgehensweise der Konstruktion von Flächen mithilfe von Kurven besteht darin, Kurven während der Extrusion zu verändern bzw. in andere Kurven übergehen zu lassen. Dazu wird mit Querschnittskurven entlang der Extrusionskurve oder mehrerer Extrusionskurven gearbeitet – diese können verändert oder durch andere Kurven ersetzt werden. Das Beispiel in Abbildung 8 zeigt, wie sich auf diese Weise ein Teil der Front eines Automobils konstruieren lässt.

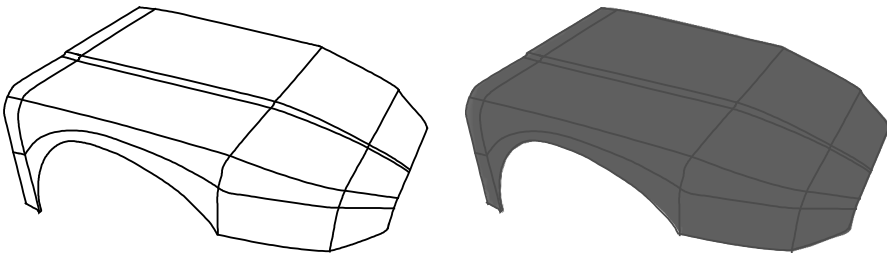


Abb. 8: Konstruktion eines Teils einer Automobilkarosserie

Die Konstruktion erfolgte mithilfe der 3D-Grafiksoftware Carrara. Bei den dargestellten Extrusions- und Querschnittskurven handelt es sich um räumliche Bézierkurven. Diese können, wie bereits für ebene Bézierkurven gezeigt, durch Modifikation der Stützpunkte und Tangentenvektoren bearbeitet werden. Zur Konstruktion einer Fläche lassen sich beliebig viele Querschnittskurven einfügen und bearbeiten; außerdem ist eine Bearbeitung der Extrusionskurven möglich. Da verschiedene Bereiche der Querschnittskurven entlang unterschiedlicher Kurven extrudiert werden können, ist die Unterscheidung zwischen Extrusions- und Querschnittskurven nur hinsichtlich der Handhabung des Werkzeugs, nicht jedoch hinsichtlich der Auswirkungen der Kurven auf die Erzeugung der Fläche von Bedeutung. Für die mathematische Beschreibung der entstehenden Flächen sind Extrusions- und Querschnittskurven gleichwertig. In dieser Hinsicht handelt es sich bei Flächen wie in Abbildung 8, die aus Kurven konstruiert wurden, um die weiter unten beschriebenen Tensorproduktflächen.

Bézierflächen

Als für die Modellierung von Formen sehr flexible Objekte haben in der Computergrafik und in der computergestützten Konstruktion Flächen eine hohe Bedeutung erlangt, die durch beliebig im Raum angeordnete Punkte verlaufen oder sich diesen annähern und deren Formen sich durch die Veränderung von Tangenten steuern und „verfeinern“ lassen. Realisiert werden derartige „Freiformflächen“ im Allgemeinen durch die mindestens einfach stetig differenzierbare Zusammensetzung bikubischer Flächenstücke (Patches), also von Flächenstücken, die sich als Funktionen 3. Grades

$$\vec{p}(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \vec{a}_{i,j} u^i v^j, \quad (2)$$

bzw. in Koordinatenschreibweise

$$x(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{i,j}^{(x)} u^i v^j, \quad y(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{i,j}^{(y)} u^i v^j, \quad z(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{i,j}^{(z)} u^i v^j \quad (3)$$

in den beiden Parametern u und v darstellen lassen. Dabei sind $\vec{a}_{i,j} = (a_{i,j}^{(x)}; a_{i,j}^{(y)}; a_{i,j}^{(z)})^T$ (mit $i, j = 0, \dots, 3$) die 16 Koeffizientenvektoren des Flächenstücks. Im Folgenden wird nur die platz sparende Vektorschreibweise verwendet; Koordinatendarstellungen ergeben sich daraus jeweils wie (3) aus (2).

Die in der Praxis gebräuchlichen Freiformflächen entstehen durch Erweiterung von Bézierkurven, interpolierenden Splinekurven oder der weiter unten beschriebenen B-Splinekurven zu *Tensorproduktflächen*. Diese können, wie bereits im vorangegangenen Abschnitt illustriert, als „Kurven von Kurven“ aufgefasst werden. Werden alle Kontrollpunkte einer Bézier- oder Splinekurve entlang ebensolcher Kurven durch den Raum bewegt, so entstehen Kurvenscharen, die Flächen beschreiben. Im Folgenden wird dieses Konzept anhand der Bézierflächen skizziert.

Die Tensorproduktfläche eines nach (1) durch die Parameterdarstellung $\vec{p}(u) = \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(u) \cdot \vec{p}_i$ beschriebenen kubischen Bézierkurvenstücks entsteht, indem die Ortsvektoren \vec{p}_i der Kontrollpunkte durch Bézierkurvenstücke ersetzt werden, die sich ebenfalls nach (1) durch $\sum_{j=0}^3 B_{j,3}(v) \cdot \vec{p}_{i,j}$ ($i = 0, \dots, 3$) beschreiben lassen. Für das entstehende Flächenstück ergibt sich daraus die Parameterdarstellung

$$\vec{p}(u, v) = \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(u) \left(\sum_{j=0}^3 B_{j,3}(v) \cdot \vec{p}_{i,j} \right) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_{i,3}(u) \cdot B_{j,3}(v) \cdot \vec{p}_{i,j} \quad (4)$$

mit den Bernsteinpolynomen

$$B_{i,3}(u) = \binom{3}{i} u^i (1-u)^{3-i} \quad \text{und} \quad B_{j,3}(v) = \binom{3}{j} v^j (1-v)^{3-j}; \quad u, v \in [0;1].$$

Die Form dieses *Bézierflächenstücks* (oft als *Bézierpatch* bezeichnet) wird durch 16 Kontrollpunkte $P_{i,j}$ mit den Ortsvektoren $\vec{p}_{i,j}$ bestimmt (siehe Abbildung 9). Davon gehören $P_{0,0}$, $P_{0,3}$, $P_{3,0}$ und $P_{3,3}$ dem Flächenstück an; $P_{1,0}$, $P_{0,1}$, $P_{0,2}$, $P_{1,3}$, $P_{2,0}$, $P_{3,1}$, $P_{3,2}$ und $P_{2,3}$ legen mit diesen zusammen die Tangentenvektoren der vier das Flächenstück begrenzenden Bézierkurvenstücke in ihren Endpunkten fest.

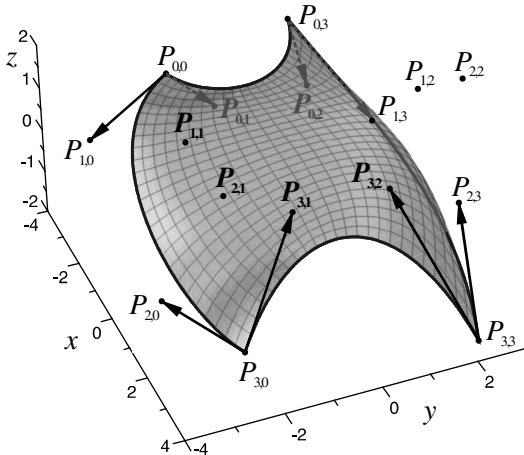


Abb. 9: Bézierpatch

Durch das Zusammenfügen von Bézierpatches mit jeweils 8 gemeinsamen Kontrollpunkten (analog zu der bereits beschriebenen Zusammensetzung von Bézierkurvenstücken) lassen sich komplexe Flächen erstellen. So setzt sich das vielleicht bekannteste Objekt der Computergrafik, die Teekanne der Universität Utah, aus Bézierpatches zusammen (Abbildung 10).

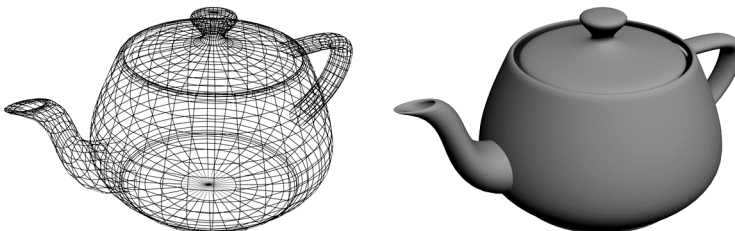


Abb. 10: Utah-Teapot

Aufgrund der hohen Zahl einzugebender Kontrollpunkte ist die Modellierung mit Bézier- und anderen Freiformflächen auf Koordinatenebene kaum möglich und bleibt deshalb Programmen mit grafischer (mausgestützter) Eingabe vorbehalten. Die bereits für ein einzelnes Flächenstück recht

große Anzahl von Kontrollpunkten (siehe Abbildung 9) bedingt, dass viel Erfahrung notwendig ist, um die Wirkungen der Kontrollpunkte und Tangenten auf die Flächenform für Modellierungszwecke zu nutzen. Für die praktische Konstruktion von Bézierflächen eignet sich deshalb besonders gut die bereits bei der Erstellung eines Karosseriebestandteils (siehe Abbildung 8) angewendete Methode des „Zeichnens“ von Bézierkurven mit gemeinsamen Kontrollpunkten und ihres Zusammensetzens zu Flächen. Durch die Möglichkeit, Kontrollpunkte und Tangenten nachträglich zu verändern sowie zusätzliche Kurven einzufügen, können bei dieser Konstruktionsmethode Flächen recht detailliert an die gewünschten Formen angenähert werden. Auf diese Weise lassen sich u. a. die wesentlichen Bestandteile einer Automobilkarosserie und Teile der Innenausstattung entwerfen.

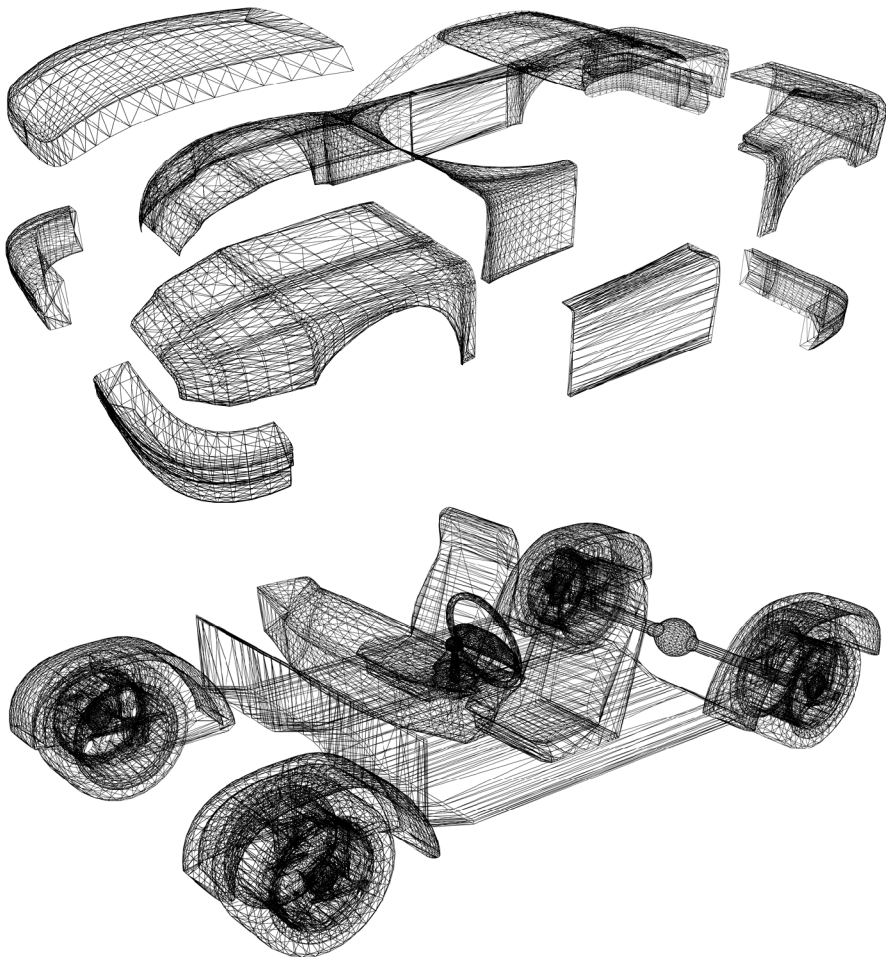


Abb. 11: Bestandteile einer KFZ-Karosserie und der Innenausstattung

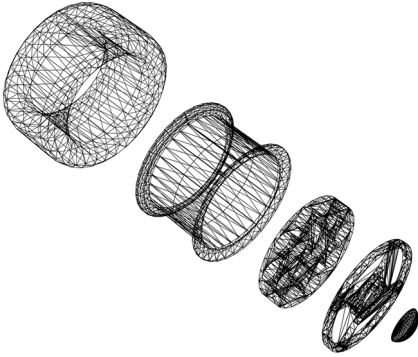


Abb. 12: Bestandteile der Räder des konstruierten Automobils

In den Abbildungen 11 und 12 sind nicht (wie in Abbildung 8) die Bézierkurven dargestellt, mit deren Hilfe die einzelnen Flächen konstruiert wurden, sondern die von der Software daraus automatisch generierten Gitternetze. Deren Zahl ist wesentlich höher als die der zu konstruierenden Kurven – siehe dazu Abbildung 7, die sowohl die beiden Kurven, aus denen eine Fläche erzeugt wird, als auch das daraus generierte Gitternetz zeigt.

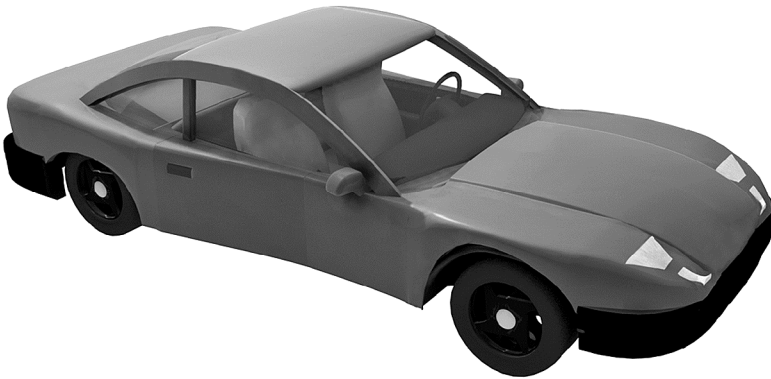


Abb. 13: Ein mithilfe von Bézierflächen konstruiertes Automobil (vgl. Farbabb. 22)

Abbildung 13 zeigt das Ergebnis der Konstruktionsarbeiten. Das Fahrzeug hat noch eine Reihe von Schwächen, die zu umgehen oder beseitigen mehr Professionalität im Konstruieren mit Bézierflächen erfordern würde. Immerhin hat es sich seit dem ebenen Entwurf in Abbildung 3 beachtlich verändert. Ein genauer Vergleich der Abbildungen 3 und 13 zeigt, dass die Grundform der Karosserie beibehalten wurde, wenngleich die fertige Karosserie aus einer Reihe einzelner Bauteile (siehe Abbildung 11) besteht.

Zu welcher Fahrzeugklasse gehört das in Abbildung 13 dargestellte Modell? Die bereits für Bézierkurven genannten Differenzierbarkeitseigenschaften gelten auch für Bézierflächen, aus denen das Fahrzeug hauptsächlich besteht.³ Somit sind die Oberflächen des Automobils (von Ausnahmen abgesehen) einfach stetig differenzierbar. Zwar lassen sich durch Einhaltung bestimmter Bedingungen mehrfach stetig differenzierbare Bézierkurven und -flächen erzeugen,⁴ jedoch verursachen diese Bedingungen starke Einschränkungen bei der Modellierung von Formen. Wir konnten also in den vorangegangenen Abschnitten lediglich ein Automobil der C_1 -Klasse konstruieren. Eine höhere Qualität ermöglichen B-Spline- bzw. NURBS-Flächen, auf die im Folgenden eingegangen wird.

B-Splinekurven

Splinekurven wurden bereits vor den Bézierkurven genutzt; sie kamen u. a. im Schiffsbau zur Anwendung. Bei der Konstruktion eines Schiffsrumpfes werden lange, flexible Metallstreifen (Splines) an einzelnen Punkten fixiert.⁵ Allgemein handelt es sich bei Splinekurven um stückweise zusammengesetzte Kurven, die an ihren Segmentübergängen bestimmte Glattheits-, also Differenzierbarkeitsbedingungen erfüllen.⁶ Als Funktionsterme, welche diese Kurven beschreiben, werden fast ausschließlich Polynome verwendet.

Bei Basis-Splinekurven (bzw. B-Splinekurven oder kurz B-Splines) besitzen Veränderungen von Kontrollpunkten nur lokalen Einfluss, ändern den Kurvenverlauf also nur in Bereichen um die betreffenden Punkte. Diese Eigenschaft ist für grafisches Konstruieren, bei dem oft Teilbereiche von Kurven zu modifizieren sind, von hoher Bedeutung. Eine B-Splinekurve vom Grad $k-1$ wird durch n Kontrollpunkte (DE-BOOR-Punkte) P_1, \dots, P_n und einen Knotenvektor $\vec{t} = (t_0; \dots; t_{n+k})^T$ (mit $t_j \leq t_{j+1}$ für $j = 1 \dots n+k-1$) festgelegt und durch folgende Parameterdarstellung beschrieben:

$$\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^n N_{i,k}(t) \cdot \vec{p}_i; \quad t \in [t_1; t_{n+k}[. \quad (5)$$

Dabei sind $N_{i,k}(t)$ die Basisfunktionen der B-Splinekurve; sie werden rekursiv definiert:

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1 \leq i \leq n+k-1),$$

$$N_{i,m}(t) = \frac{(t-t_i)}{t_{i+m-1}-t_i} N_{i,m-1}(t) + \frac{(t_{i+m}-t)}{t_{i+m}-t_{i+1}} N_{i+1,m-1}(t) \quad \left(\begin{array}{l} 2 \leq m \leq k, \\ 1 \leq i \leq n+k-m \end{array} \right).$$

Da an den Knotenvektor $\vec{t} = (t_0; \dots; t_{n+k})^T$ nicht die Bedingung $t_i \neq t_j$ für $i \neq j$ gestellt wird, können die Terme $t_{i+m-1} - t_i$ bzw. $t_{i+m} - t_{i+1}$ im Nenner den Wert Null annehmen. In diesen Fällen werden die gesamten betreffenden Summanden als Null aufgefasst. In der Definition wurde auf diese Fallunterscheidung aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet; bei der Programmierung ist sie unbedingt zu berücksichtigen.

Auf die Darstellung der expliziten Funktionsterme der Basisfunktionen wird hier verzichtet; durch die hohe Zahl an Fallunterscheidungen für $m \geq 3$ sind diese sehr umfangreich. Unter

www.afiller.de/bezier

stehen Dateien zur Verfügung, mithilfe derer sich die Funktionsterme für Basisfunktionen beliebigen Grades in dem Computeralgebrasystem MuPAD ausgeben lassen.

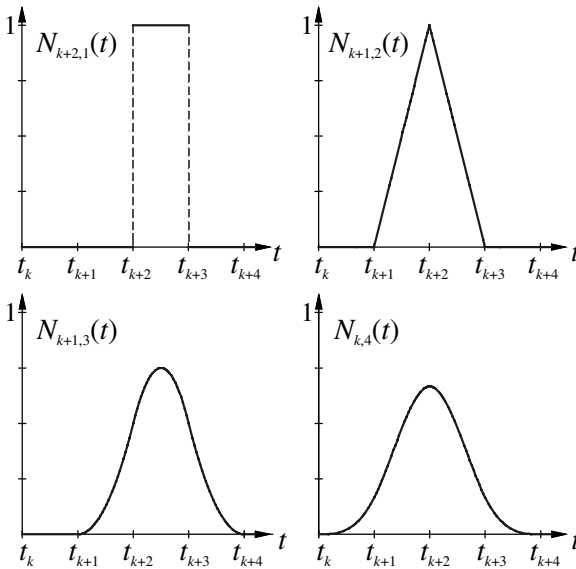


Abb. 14: B-Spline-Basisfunktionen 0., 1., 2. und 3. Grades ($m = 1, 2, 3, 4$) (vgl. Farbbild 23)

B-Spline-Basisfunktionen vom Grad $k - 1$ (siehe Abbildung 14) sind in höchstens k zusammenhängenden, von Komponenten des Knotenvektors \vec{t} begrenzten, Intervallen von Null verschieden. Aus dieser Eigenschaft resultiert die Lokalität der B-Splinekurven: die Änderung der Koordinaten eines Kontrollpunktes P_i beeinflusst die Parameterdarstellung (5) der Kurve nur über einem Intervall $[t_i; t_{i+k}[$. Auf diesem Intervall werden die Basisfunktionen durch stückweise konstante, lineare, quadratische bzw. kubische Funktionsterme beschrieben (für $k = 1, \dots, 4$). B-Splines höheren als 3. Grades werden in der Praxis nur in Ausnahmefällen genutzt.

Die Summe aller Basisfunktionen gleichen Grades ist eine konstante Funktion über dem gesamten Definitionsbereich von t :

$$\sum_{i=1}^n N_{i,k}(t) = 1; \quad t \in [t_1; t_{n+k}[. \tag{6}$$

B-Splines 3. Grades sind in den einfachen Knoten (t_j mit $t_{j-1} \neq t_j \neq t_{j+1}$) zweifach stetig differenzierbar (Kurven der Klasse C_2), da die zweiten Ableitungen der kubischen Basisfunktionen stückweise lineare Funktionen und an einfachen Knoten stetig sind.

Den Einfluss der Knotenvektoren \vec{t} auf den Verlauf kubischer B-Splinekurven zeigen die Abbildungen 15 und 16. Die Kontrollpunkte beider Kurven sind identisch:

- $P_1(-1;1)$, $P_2(-0,5;-1)$, $P_3(0,4;-2)$, $P_4(2;-0,5)$, $P_5(3,6;-2)$, $P_6(4,5;-1)$ und $P_7(2;2)$.

Die obere Kurve hat den Knotenvektor $(0;0;0;0;0,25;0,5;0,75;1;1;1;1)^T$,
 der Knotenvektor der unteren Kurve ist $(0;0;0;0;0,1;0,2;0,85;1;1;1;1)^T$.

B-Splinekurven, bei denen die Parameterintervalle zwischen benachbarten Knoten (außer den identischen Randknoten) gleich lang sind, heißen *uniforme B-Splines*; bei unterschiedlich langen Parameterintervallen entstehen *nicht uniforme B-Splines*.

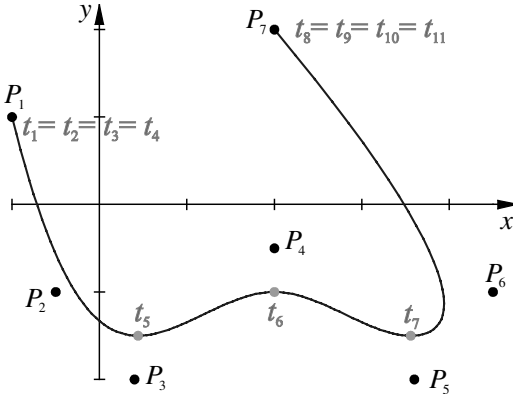


Abb. 15: Uniforme B-Splinekurve
 (vgl. Farbbild 24)

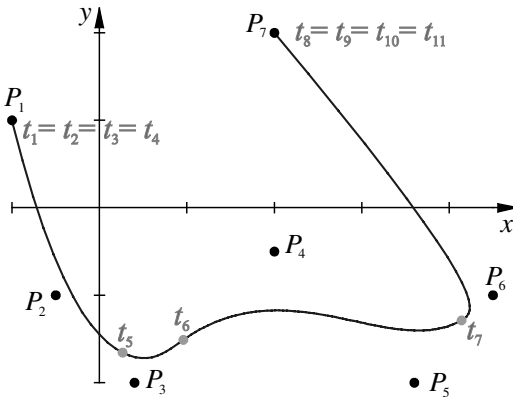


Abb. 16: Nicht uniforme B-Splinekurve
 (vgl. Farbbild 25)

Durch die Verwendung unterschiedlicher Knotenvektoren ergeben sich vielfältige Kurvenverläufe von B-Splinekurven.⁷ Die Möglichkeit, zusätzliche Kontroll- sowie Knotenpunkte einzufügen oder zu verschieben, ohne dabei den Kurvenverlauf global zu verändern, ermöglicht sehr flexible Kurvenanpassungen und ist die Hauptursache dafür, dass B-Splinekurven und daraus erzeugte Tensorproduktflächen zu den wichtigsten Modellierungsmitteln in der professionellen 3D-Computergrafik und im CAD gehören.

Eine besonders große Bedeutung haben die Nicht Uniformen Rationalen B-Splines (*Non-Uniform Rational B-Splines* bzw. NURBS) erlangt. Diese stellen eine aus der Verwendung homogener Koordinaten⁸ resultierende Verallgemeinerung der B-Splines dar. NURBS-Kurven lassen sich ebenfalls durch die Parameterdarstellung (5) mit den rekursiv definierten B-Spline-Basispolynomen $N_{i,k}(t)$ beschreiben. Die Ortsvektoren \vec{p}_i der Kontrollpunkte enthalten dann wegen der Verwendung homogener Koordinaten jeweils eine zusätzliche Komponente w_i ; kartesischen Koordinaten $(x_i; y_i; z_i)$ entsprechen homogene Koordinatenquadrupel $(w_i x_i; w_i y_i; w_i z_i; w_i)$. Da im Allgemeinen eigentliche (euklidische) Kontrollpunkte betrachtet werden, sind alle w_i von Null verschieden. Damit kann durch Multiplikation jeweils aller Koordinaten der Kontrollpunkte mit geeigneten Faktoren erreicht werden, dass alle w_i positiv sind, wovon im Folgenden ausgegangen wird.

Für die w -Koordinaten von Punkten einer NURBS-Kurve gilt nach (5):

$$w(t) = \sum_{i=1}^n N_{i,k}(t) \cdot w_i.$$

Durch Division der Parameterdarstellung (5) durch $w(t)$ ergibt sich folgende Parametrisierung einer NURBS-Kurve in kartesischen Koordinaten:

$$\vec{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^n N_{i,k}(t) \cdot w_i \cdot \vec{p}_i}{\sum_{j=1}^n N_{j,k}(t) \cdot w_j}; \quad t \in [t_1; t_{n+k}[. \quad (7)$$

Die Parameterdarstellungen von NURBS sind für jede Komponente stückweise gebrochene rationale Funktionen. Die aus der homogenen Darstellung hervorgegangenen Koeffizienten w_i wichten die Einflüsse von Kontrollpunkten auf den Verlauf der Kurve; sie werden daher als Punktgewichte bezeichnet.⁹ Somit ermöglichen NURBS besonders vielfältige Möglichkeiten, den Kurvenverlauf zu beeinflussen: Anzahl und Positionen der Kontrollpunkte, Knoten, Punktgewichte. Allerdings erfordert die Modellierung mit NURBS einen sehr hohen Einarbeitungsaufwand und viel praktische Erfahrung, über die der Autor dieses Beitrags nicht verfügt. Somit endet der Beitrag etwas unbefriedigend mit der Feststellung, dass die Konstruktion eines Automobils der C_2 -Klasse mithilfe von NURBS sehr gut möglich ist, ohne dass jedoch ein entsprechendes Ergebnis präsentiert werden kann.

Anmerkungen

¹ Zur Herleitung weiterer Eigenschaften von Bézierkurven siehe u. a. Dzung Wong (2003), Aumann/Spitzmüller (1993, 348-366) und Foley/van Dam (1994, 383-389).

- 2 Flächen, die durch Rotation geschlossener Kurven entstehen, begrenzen Körper. Bei Rotation offener Kurven entstehen Körper, falls die Enden der Kurve auf der Rotationsachse liegen. Im Allgemeinen werden jedoch keine Körper erzeugt, weshalb in diesem Beitrag der Begriff „Rotationsfläche“ verwendet wird.
- 3 Zu den Differenzierbarkeitseigenschaften von Bézierflächen siehe Aumann/Spitzmüller (1993, 467-505), Brüderlin/Meier (2001, 233-238), Foley/van Dam (1994, 399-405) und Jones (2001, 286-292).
- 4 Zu Bedingungen, unter denen Bézierkurven mehrfach differenzierbar sind, siehe u. a. Aumann/Spitzmüller (1993, 360ff.) und Brüderlin/Meier (2001, 218ff.).
- 5 Steife Metallstreifen nehmen bei Fixierung durch Kontrollpunkte die Form an, bei der die geringste Biegeenergie auftritt. Dieser Fall tritt ein, wenn das Integral des Absolutbetrags der Krümmung über die gesamte Kurve, deren Form der Streifen annimmt, minimal ist. In Aumann/Spitzmüller (1993, 341ff.) wird gezeigt, dass interpolierende kubische Splinefunktionen diese Bedingung in guter Näherung erfüllen. Splinefunktionen sind nicht nur im Zusammenhang mit Konstruktionen und geometrischer Modellierung von Bedeutung, sondern vor allem in der Numerik, u. a. bei der Interpolation von Messwerten.
- 6 In der Literatur werden Splinekurven mit recht unterschiedlichem Allgemeinheitsgrad definiert, vgl. u. a. Aumann/Spitzmüller (1993, 329-398), Bender/Brill (2003, 128-166), Brüderlin/Meier (2001, 224-232), Foley/van Dam (1994, 389-398) und Watt (2002, 94-113).
- 7 Verläufe von B-Splinekurven in Abhängigkeit von den Knotenvektoren werden u. a. in Bender/Brill (2003, 156-163) und Watt (2002, 97-108) diskutiert. Beliebige ebene B-Splinekurven lassen sich durch Variation der Anzahl und der Koordinaten der Kontrollpunkte sowie des Knotenvektors in MuPAD-Dateien generieren, die auf der bereits erwähnten Internetseite <http://www.afiller.de/bezier> zur Verfügung stehen.
- 8 Homogene Koordinaten werden in der projektiven Geometrie verwendet, siehe u. a. Pareigis (1990). Ein kurze Einführung zur Verwendung homogener Koordinaten in der Computergrafik enthält auch Filler (2007, 86).
- 9 Haben alle Punktgewichte w_i den Wert 1, so nimmt (7) wegen (6) die Gestalt (5) an. Die NURBS-Kurve ist in diesem speziellen Falle also eine gewöhnliche B-Splinekurve.

Literatur

- Aumann, G./Spitzmüller, K. (1993). *Computerorientierte Geometrie*. Mannheim: B.I. Wissenschaftsverlag.
- Bender, M./Brill, M. (2003). *Computergrafik*. München: Hanser.
- Brüderlin, B./Meier, A. (2001). *Computergrafik und Geometrisches Modellieren*. Stuttgart: Teubner.
- Dzung Wong, B. (2003). *Bézierkurven: gezeichnet und gerechnet. Ein elementarer Zugang und Anwendungen*. Zürich: Orell Füssli.
- Filler, A. (2007). *Einbeziehung von Elementen der 3D-Computergrafik in den Mathematikunterricht der S II im Stoffgebiet Analytische Geometrie* (Habilitationsschrift). Dokumenten- und Publikationsserver der Humboldt-Universität zu Berlin: <http://edoc.hu-berlin.de>.
- Foley, J. D./van Dam, A./Feiner, S. K./Hughes, J. F./Phillips, R. L. (1994). *Grundlagen der Computergraphik*. Bonn: Addison-Wesley.
- Jones, H. (2001). *Computer Graphics through Key Mathematics*. London: Springer.
- Pareigis, B. (1990). *Analytische und projektive Geometrie für die Computer-Graphik*. Stuttgart: Teubner.

- Roth, N. (2002). Ein integratives Grundkurskonzept am Beispiel der Bézierkurven. In: *mathematica didactica* 25, 95–113.
- Watt, A. (2002). *3D-Computergrafik*. München: Pearson Education.

Dateien im Internet

Auf der Internetseite <http://www.afiller.de/bezier> stehen einige Dateien zur Verfügung, mit denen Abbildungen in diesem Beitrag erzeugt wurden. Die Entstehung der hier beschriebenen Kurven und Flächen kann mithilfe dieser Dateien in der dynamischen Geometriesoftware Geometer's Sketchpad bzw. in dem Computeralgebrasystem MuPAD nachvollzogen werden und es sind auch Variationen daran möglich. Außerdem kann die Datei heruntergeladen werden, mit der die Darstellungen des räumlichen Automodells (Abbildungen 11–13) in der 3D-Grafiksoftware Maxon Cinema 4D (Version 10) generiert wurden.

Mathematik im Wandel

Klaus Volkert
Universität zu Köln/Université Nancy 2

Wie viele Dimensionen hat der Raum – und wie lässt sich das beschreiben?

Summary

This paper¹ gives some steps in the historical process which leads to a characterization of the three-dimensional Euclidean space with the help of elementary synthetic geometry only.

Einleitung

Die Raumgeometrie ist wohl so alt wie die Geometrie selbst, schon in Euklids „Elementen“ nimmt sie einen beachtlichen „Raum“ – nämlich die Bücher XI bis XIII – ein. Dennoch spielte der Raum selbst in der Geschichte der Geometrie lange Zeit eine nur untergeordnete Rolle. Er lieferte die Bühne, auf der sich die Geometrie der körperlichen Figuren abspielte, welche die ganze Aufmerksamkeit auf sich zog.² Anders gesagt, war die Raumgeometrie lange Zeit eine Geometrie *im* Raum und nicht eine *des* Raumes. Das änderte sich in dem Moment, in dem der Raum sich „bemerken“ machte, das heißt, in dem man auf Eigenschaften stieß, die in der Geometrie Verwendung finden und die doch von der Natur des Raumes abhängen. Die scheinbar einfachste und sicher naheliegendste „Eigenschaft“ des Raumes, die geometrisch von Wichtigkeit ist, ist seine Dreidimensionalität.

Der Begriff „Dimension“ selbst hat eine interessante Geschichte, auf die ich hier nur ansatzweise eingehen kann. Ursprünglich bezog sich „Dimension“ auf Körper, also nicht auf den Raum, bedeutete soviel wie „Abmessung“ oder „Erstreckung“ (Tropfke 1940, 48-50) und war synonym mit „Intervall“; so zitiert Tropfke eine Definition von Gerbert: „Solidum corpus est quidquid tribus intervallis seu dimensionibus porrigitur“ (Tropfke 1940, 49 n. 260). Während in Wolffs „Mathematischem Lexicon“ ein entsprechendes Stichwort noch fehlt (er hat nur ein Stichwort „Solidum, Corpus, ein Körper“), gibt es bei Klügel einen Eintrag „Abmessung (Dimensio), ist eine Linie, nach welcher die Ausdehnung einer geometrischen Größe gemessen werden mag. In dem geometrischen Körper kann man durch jeden Punkt drey Linien ziehen, deren jede auf die beiden andern senkrecht steht, und die Ausdehnung des Körpers nach diesen drey Linien messen oder sich auch nur vorstellen. Diese drey Meßlinien heißen in besondern Rücksichten Länge, Breite, Dicke oder Höhe. Ein Körper ist demnach eine Ausdehnung von drey

Abmessungen oder Dimensionen“ (Klügel 1803, 3). Nachdem erklärt wird, dass folglich eine Fläche zweidimensional sei, finden sich bei Klügel – wie bei vielen anderen Autoren der Zeit – lange Ausführungen zur Dimension von Größen in der Algebra. Ganz am Schluss des Eintrags erwähnt Klügel noch d’Alemberts Enzyklopädieartikel³ „Dimension“ und die darin enthaltene Idee, man könne die Zeit als vierte Dimension auffassen, „so dass das Produkt aus einer körperlichen Größe in die Zeit eine Größe von vier Dimensionen vorstelle“ (Klügel 1803, 7), was Klügel aber umgehend verwirft. Einen ausführlichen Artikel „Abmessung (Dimension)“ findet man in Ersch’s und Grubers Enzyklopädie: „... ist die Beschaffenheit einer stetig ausgedehnten Größe, dass sie nach einer geraden Linie messbar ist.“ (Ersch/Gruber 1818, 142), was am Beispiel der eindimensionalen Zeit erläutert wird. Auch dieser Artikel endet mit Erörterungen zur vierten Dimension, die aber nicht mehr so ablehnend ausfallen wie jene Klügels: „Eine vierte Abmessung des Raums können wir uns nicht vorstellen, denn alle Perpendikel, die wir auf einem körperlichen Raum irgendwo errichten mögen, sind immer nur solche verlängerte Linien, nach welchen die ersten drei Dimensionen messbar sind“ (Ersch/Gruber 1818, 143f.). Zum Abschluss betont der Verfasser Mellin, dass die drei Linien, nach denen gemessen wird, nicht die Dimensionen des Körpers selbst seien, sondern lediglich Hilfsmittel für die Messung desselben darstellten.

In all diesen Zitaten fällt auf, dass der Abstraktionsschritt zum Raum selbst noch nicht wirklich vollzogen worden ist. Der Raum hat keine eigenständigen Eigenschaften, diese werden vielmehr durch die Körper festgelegt. Dies änderte sich erst in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts.⁴ Bei Baltzer heißt es 1867 schon recht modern (Baltzer 1867, 3):

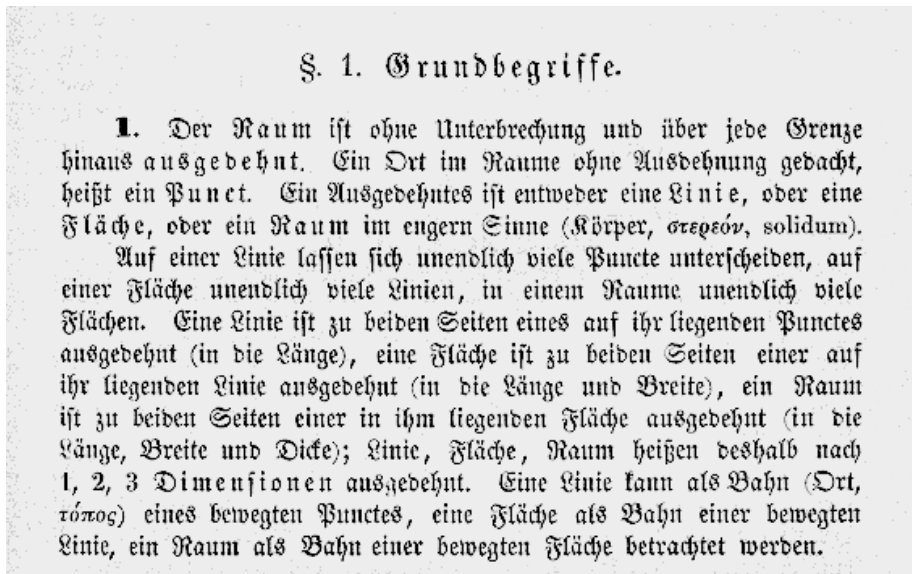


Abb. 1

Man kann in der Geschichte der Dimensionstheorie mehrere Stränge unterscheiden: Zum einen gibt es den Zugang über die Elementargeometrie, der natürlich auch der älteste ist. Er lässt sich, wie wir sehen werden, bis Euklid zurückverfolgen und wird uns in diesem Artikel beschäftigen. Daneben gibt es den analytischen Zugang, der den Raum als eine „Zahlenmannigfaltigkeit“ (Helmholtz) von Tripeln meist reeller Zahlen auffasst und der die Kenntnis der analytischen Geometrie voraussetzt. Er ist somit wesentlich jünger, wobei die Frage, wann dieser Schritt wirklich getan wurde, noch einer genaueren Untersuchung harret. Er dürfte aber in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts erfolgt sein (Boyer 1956). Schließlich ist die mengentheoretisch-topologische Richtung zu nennen, die mit Hilbert und Poincaré ihren Anfang nahm, und mit Namen wie Brouwer, Hausdorff, Hurewicz, Menger u.a. verbunden ist, also erst im 20. Jahrhundert zur Entfaltung kam (Crilly/Johnson 1999). Mit den beiden zuletzt genannten Richtungen werden wir uns hier nicht beschäftigen.

Euklid XI, 3 und dessen Folgen

Es mag erstaunen, Tatsache ist dennoch, dass Euklid den Begriff des Raumes in seinen „Elementen“ nicht explizit verwendet. Peano kommentierte diese Tatsache folgendermaßen: „Wollte man den Begriff des Raumes als grundlegend für die Geometrie betrachten, so würde daraus folgen, dass man ein Lehrbuch dieser Wissenschaft nicht schreiben könnte in einer Sprache, in der zufällig ein solches Wort fehlt. Folglich könnte man keine Geometrie schreiben in der Sprache des Euklid und des Archimedes, in der gerade das der Bezeichnung Raum in demjenigen Sinne entsprechende Wort fehlt, in welchem es in den heutigen Lehrbüchern gebraucht wird.“ (Übersetzt von F. Schur, zitiert nach Schur 1909, 3.) Ähnlich äußert sich übrigens auch Heidegger in seiner „Einführung in die Metaphysik“.

Am Beginn des elften Buches der „Elemente“ finden wir bei Euklid folgende Definitionen (Euklid 1973, 315):

- „1. Ein Körper ist, was Länge, Breite und Tiefe hat.
2. Eine Begrenzung eines Körpers ist eine Fläche.“

Der Raum selbst bleibt also unbestimmt im Hintergrund, nur die in ihm enthaltenen Figuren (Körper) interessieren. In der Kunstgeschichte wird ein solcher Raum negativ genannt im Unterschied zum positiven (negativen) Raum, der selbst Gegenstand der Aufmerksamkeit ist – also eben nicht mehr nur Hintergrund (Kern 1983, 153ff.). Dennoch stoßen wir bald auf eine Eigenschaft des Raumes, wenn diese auch nicht als solche von Euklid ausdrücklich kenntlich gemacht wird (Euklid 1973, 318):

- „§ 3. Wenn zwei Ebenen einander schneiden, ist ihr Schnittgebilde eine gerade Linie.“

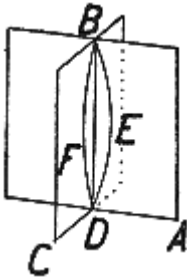


Abb. 2

Euklid argumentiert folgendermaßen: Die beiden Ebenen AB und BC schneiden sich (so wird die Annahme interpretiert) in der Linie DB. Angenommen DB wäre keine Gerade. Dann könnte man die beiden Punkte B und D in der Ebene AB durch die gerade Linie DEB und in der Ebene BC durch die Gerade BFD verbinden. Diese beiden Geraden, die verschieden sein müssen, da sie in verschiedenen Ebenen liegen, hätten folglich zwei Punkte gemeinsam, nämlich B und D. Als sich schneidende Geraden lägen sie in einer (dritten) Ebene (nach XI, 2), begrenzten folglich in dieser einen Flächenraum – modern gesprochen ein Zweieck. Dies ist aber nach Axiom 9 des ersten Buches unmöglich.

Man beachte, dass XI, 3 nicht einfach eine Eigenschaft von Ebenen ausdrückt (wie etwa jene, mit zwei Punkten deren gesamte Verbindungsgerade zu enthalten). Vielmehr geht es hier um die relative Lage zweier Ebenen im Raum. Analysiert man den von Euklid gegebenen Beweis genauer, so fällt schnell auf, dass er sich erheblich vereinfachen lässt. Dazu benötigt man nur das Axiom, dass drei nicht kollineare Punkte eindeutig eine Ebene festlegen – ein Grundsatz, den Euklid allerdings so nicht formuliert, aber dennoch oft verwendet. Er kommt implizit in XI, 2 zum Ausdruck („Wenn zwei gerade Linien einander schneiden, liegen sie in einer Ebene; und jedes Dreieck liegt in einer Ebene.“) und wird im XI. Buch bei vielen Konstruktionen verwendet, etwa in § 11 (Konstruktion des Lotes von einem Punkt außerhalb einer Ebene auf eben diese Ebene). Begründet wird Satz XI, 2 von Euklid mit der Tatsache, dass eine Gerade, die zwei nicht identische Punkte mit einer Ebene gemeinsam hat, ganz in dieser Ebene liegen muss.

Kommen wir zu der angekündigten Vereinfachung des Euklidischen Beweises für XI, 3 zurück. Angenommen, das Schnittgebilde der beiden nicht identischen Ebenen wäre eine Linie, aber keine Gerade. Dann könnte man in diesem Schnitt drei Punkte, etwa Euklids Punkte B, C und E, wählen. Da diese nach Voraussetzung nicht auf einer Geraden liegen, bestimmen sie eindeutig eine Ebene. Andererseits gehören sie aber dem Durchschnitt an, also zwei Ebenen. Diese müssten folglich identisch sein – im Widerspruch zur Annahme. – In dieser Form findet sich der Beweis beispielsweise in Legendre's „*Éléments de géométrie*“ und in Lacroix' Buch des gleichen Titels.⁵ Auch in dem im 18. Jahrhundert in Frankreich viel genutzten „*Cours*

de mathématique“ von Bézout findet sich im zweiten Teil ein analoger Beweis (Bézout 1812, 96).

Allen diesen Beweisen ist gemeinsam, dass sie davon ausgehen, dass der Schnitt zweier Ebenen eine Linie sein muss, was gelegentlich – z. B. bei Lacroix – argumentativ durch den Hinweis gestützt wird, dass die Grenzen von Flächen, in Sonderheit von Ebenen, Linien sein müssten (Lacroix 1819, 1). Bei Euklid wäre in diesem Zusammenhang Definition 6 des ersten Buches zu nennen: „Die Enden einer Fläche sind Linien.“ (Euklid 1973, 1). Bei genauerer Betrachtung stellt man jedoch schnell fest, dass zwei Punkte im Durchschnitt genügen, um den fraglichen Satz zu beweisen: Diese legen ja eindeutig eine Gerade fest, welche ganz in den jeweiligen Ebenen enthalten sein muss, folglich auch ganz in deren Durchschnitt. Diese Argumentation findet man beispielsweise bei Hérigone im 17. Jahrhundert.

THEOR. III. PROPOS. III.

Si duo plana se mutuò secent, communis eorum sectio est linea recta.

Si deux plans se coupent l'un l'autre, la commune section d'iceux est une ligne droite.

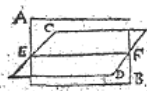
| | | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
|  | arbitr. | <p>ef, est —.</p> <p><i>Demonstr.</i></p> <p>e & f snt •; in intersect.</p> |
| <p><i>Hypoth.</i></p> <p>ab & cd snt plan;</p> <p>ef, est intersect.</p> <p><i>Req. π. demonstr.</i></p> | <p>1. p. 1</p> <p>14. 2. 1</p> <p>concl.</p> <p>14. a. c.</p> | <p>ef, est —,</p> <p>ef, est in plan; ab, cd,</p> <p>ef, est intersect.</p> |

Abb. 3

Es ist nicht allzu schwierig, die Kurzform, in welche Hérigone die Euklidischen Beweise bringt, zu entschlüsseln (Hérigone 1634, 656). Man beachte, dass Hérigone nur zeigt, dass der fragliche Durchschnitt mit zwei Punkten (E und F bei ihm genannt) die Gerade durch diese Punkte enthält. Offen bleibt, ob es außerhalb dieser Geraden noch weitere Punkte im Durchschnitt geben kann. Eine wesentlich schärfere Formulierung des fraglichen Tatbestandes verdankt man erst von Staudt (Staudt 1847, 8), wie wir weiter unten sehen werden.

Interessant für uns ist die Frage, welche Konsequenzen Euklid selbst aus seinem dritten Satz zieht, denn diese sind ja charakteristisch für den dreidimensionalen Raum. Als solche⁶ sind in erster Linie zu nennen: XI, 5, XI, 6 und XI, 13 (Euklid 1973, 320, 325):

„§ 5. Läßt sich zu drei einander treffenden Geraden senkrecht im Schnittpunkt eine gerade Linie errichten, dann liegen die drei Geraden in einer Ebene.“

§ 6. Wenn zwei Geraden auf derselben Ebene senkrecht stehen, müssen sie parallel sein.

§ 13. Es ist nicht möglich, in demselben Punkte auf derselben Ebene zwei Senkrechten nach derselben Seite zu errichten.“

Beim Beweis des fünften Satzes kommt XI, 3 eine Schlüsselstellung zu; der Beweis verläuft wie folgt:

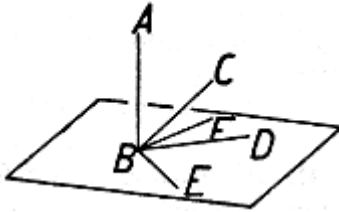


Abb. 4

Die Gerade AB stehe in B senkrecht auf den Geraden BC, BD und BE; zu zeigen ist, dass die letzteren Geraden in einer Ebene liegen. Weiter sei e die Ebene, welche durch BE und BD nach XI, 2 festgelegt wird. Angenommen, BC läge nicht in dieser Ebene. Dann bestimmen BA und BC eine weitere Ebene e' . Da B den Ebenen e und e' gemeinsam ist, schneiden sich diese in einer Geraden BF. Da BF in e liegt, steht BA senkrecht hierauf, denn BA steht auf der Ebene e senkrecht, da es auf zwei Geraden derselben senkrecht steht (XI, 4). Also wären BF und BC zwei Geraden, die in derselben Ebene e' im Punkte B senkrecht auf BA stünden. Das aber ist nicht möglich. – Euklid begründet dies nicht weiter; letztlich geht es hier um die Eindeutigkeit der Winkelantragung, die Euklid an vielen Stellen stillschweigend benutzt. Im Sonderfall des rechten Winkels könnte man eine Begründung in dem recht kryptischen Postulat 4 „Dass alle rechten Winkel einander gleich sind“ (Euklid 1973, 3) des ersten Buches sehen.

Man sieht sofort, dass man die indirekte Form des Beweises vermeiden kann (Euclide 2001, 120); das obige Argument zeigt dann, dass die Geraden BF und BD identisch sind.

Aus XI, 5 folgt, dass es keine vier paarweise orthogonalen Geraden durch einen Punkt geben kann. Da es andererseits drei dieser Geraden gibt – man nehme zwei orthogonale Geraden, die sich in B treffen; diese legen eine Ebene fest, und auf dieser Ebene kann man in B genau eine Senkrechte errichten –, erhält man sofort die für uns gewohnteste Form der Aussage:

„Der Raum ist dreidimensional“.

Das Argument lautet so: Angenommen BC, BD und BA sind paarweise senkrecht. Wäre BE eine weitere Gerade in B, die auf allen drei genannten Geraden senkrecht steht, so müsste diese nach XI, 5 mit zwei der drei vorgegebenen Geraden in einer Ebene liegen, wäre also mit einer dieser beiden Geraden identisch.

In diesem Zusammenhang zitiert Vitrac aus Simplicios' „De caelo“, der über Ptolemaios berichtet, dieser habe eine Schrift „Über die Dimension“ verfasst und in ihr ausgeführt, dass – modern gesprochen – die Dimension des Raumes sich aus der Anzahl der paarweise senkrechten Geraden in einem Punkt ergäbe (Euclide 2001, 120 n. 35). Leibniz brachte die Dreidimensionalität des Raumes mit den drei paarweise senkrechten Geraden in Beziehung: „Bei den Dimensionen der Materie aber ist es anders: hier ist die Dreizahl bestimmt, nicht durch den Grund des Besten, sondern durch eine geometrische Notwendigkeit: nur deshalb haben die Geometer beweisen können, daß es nur drei senkrecht aufeinanderstehende Linien gibt, die sich in einem Punkt schneiden.“ (Leibniz 1985, 165). Die erste Verwendung eines Koordinatensystems mit drei paarweise senkrechten Achsen wird Euler zugeschrieben; sie findet sich in seiner 1749 publizierten, sogenannten ersten Schiffstheorie von 1738 (Verdun 2003, 170f.).

Christian von Staudt und die weitere Entwicklung

Wie bereits erwähnt, war es erst Christian von Staudt, der eine erhebliche Verschärfung von Euklids Satz XI, 3 formulierte (Staudt 1847, 8):

„20. ... zwei Ebenen, welche durch einen und denselben Punkt gehen, schneiden sich in einer Geraden, welche ebenfalls durch jenen Punkt geht, außerhalb aber ... die beiden Ebenen keinen gemeinsamen Punkt mit einander gemein haben.“

Bezüglich des Existenzproblems ist von Staudt also soweit gekommen, wie nur möglich: Aus derjenigen eines einzigen gemeinsamen Punktes folgt schon die Tatsache, dass die fraglichen Ebenen eine ganze Gerade gemeinsam haben. Allerdings gibt von Staudt keinen Beweis für seinen Satz. Einen solchen findet man unter ausdrücklicher Berufung auf von Staudt zwanzig Jahre später bei Baltzer in dessen vielgenutzten „Elementen der Mathematik“. – Die Bedeutung von Baltzers „Elementen“ für die Geschichte der Geometrie, insbesondere für die Verbreitung der nichteuklidischen Geometrie im deutschen Sprachraum, beschreibt Voelke (Voelke 2005, 56f.).

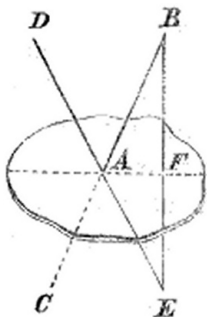


Abb. 5

Sei A der Schnittpunkt der beiden Ebenen e und e' , dann lege man in e durch A die Geraden DE und CB (siehe die Originalabbildung aus Baltzer 1867, 145; in dieser ist die Ebene e nicht angedeutet): „Durch die Punkte B und F , welche auf verschiedenen Seiten der zweiten Ebene [das ist e'] liegen, ist eine Gerade bestimmt, welche die zweite Ebene [e'] in F schneidet.“ (Baltzer 1867, 145). Mit den Punkten B und E liegt die Gerade durch diese ganz in e , folglich ist auch F ein Punkt im Schnitt der beiden Ebenen. Wie üblich folgert man, dass dann der Schnitt eine ganze Gerade sein muss.

Zwar gibt Baltzer keine axiomatische Grundlegung – was im Übrigen kaum der Intention seines Buches, das ein Kompendium der Mathematik für die Hand des Lehrers sein sollte – entsprochen hätte. Dennoch ist seine Darstellung so klar und detailliert, dass man aus ihr wichtige Hinweise in der genannten Richtung entnehmen kann; sie ist gewissermaßen „proof generating“, um mit einer vagen Anleihe bei Lakatos zu reden. Insbesondere fällt auf, dass der Baltzersche Beweis auf der Zerlegung des Raumes durch eine Ebene in zwei disjunkte Teilräume beruht, was wiederum den ersten deutlichen Hinweis auf das Dimensionsproblem liefert.

Die erste Axiomatik der projektiven Geometrie und der Euklidischen Kongruenzgeometrie wurde 1882 von Pasch in seinen „Vorlesungen über neuere Geometrie“ vorgelegt. Er löste das Problem, das uns hier interessiert, durch einen „Kernsatz“ (Paschs Ausdruck, welcher in etwa unserem „Axiom“ entspricht); dieser findet sich in dem Paragraphen, der der euklidischen Ebene gewidmet ist und der im Wesentlichen die Inzidenz- und Anordnungsaxiome der Raumgeometrie enthält (Pasch 1976, 20):

„III. Kernsatz. – Wenn zwei ebene Flächen P, P' einen Punkt gemeinsam haben, so kann man einen anderen Punkt angeben, der sowohl mit allen Punkten von P als auch mit allen Punkten von P' je in einer ebenen Fläche enthalten ist.“

Anders gesagt: Haben zwei Ebenen einen Punkt P gemeinsam, so haben sie noch einen weiteren Punkt P' gemeinsam. Der Rest folgt dann wie in früheren Beweisen (vgl. Lehrsatz 9 bei Pasch 1976, 23). Dieser Kernsatz rechtfertigt sich nach Pasch im Sinne von dessen empirischer Auffassung wie folgt: „Wenn zwei ebene Flächen gegeben sind, so kann ein Punkt A in beiden zugleich enthalten sein. Wir nehmen dann allemal wahr, dass der Punkt A nicht der einzige gemeinschaftliche Punkt ist, wenn wir nötigenfalls die beiden Flächen oder eine von ihnen gehörig erweitert haben“ (Pasch 1976, 20). Da es Pasch auch um den Aufbau der projektiven Geometrie geht, die er nach dem Vorbild von Staudts durch die Einführung uneigentlicher Punkte über Strahlenbüschel gewinnt, muss es auch ein projektives Gegenstück zum Kernsatz III geben. Dieses lautet (Pasch 1976, 49):

„13. Zwei [projektive; K. V.] Ebenen haben stets eine Gerade gemein.“

Der Beweis ergibt sich über das Ebenenbündel, welches durch die beiden Ebenen gelegt werden kann. Pasch stellt keine Beziehung zwischen seinem

Kernsatz und der Dimensionsproblematik des Raumes her, wohl schon deshalb, weil für ihn der Begriff „Raum“ – ebenso übrigens wie der Begriff „Dimension“ – im Rahmen der Kernsätze nicht vorkommt (Pasch 1976, 92, Fußnote 2 und Pasch 1925).

Hilbert hat in seinen „Grundlagen der Geometrie“ die Bedeutung des fraglichen Satzes deutlich herausgearbeitet. Im Bereich der Inzidenzaxiome (bei Hilbert ist dies die Axiomengruppe I der Verknüpfung) finden wir (Hilbert 1972, 4):

- „I 7. Wenn zwei Ebenen α, β einen Punkt A gemein haben, so haben sie wenigstens noch einen weiteren Punkt B gemein.
I 8. Es gibt wenigstens vier nicht in einer Ebene gelegene Punkte.“

Dies wird so kommentiert (Hilbert 1972, 4):

„Axiom I 7 bringt zum Ausdruck, dass der Raum nicht mehr als drei Dimensionen enthält, Axiom I 8 hingegen, dass der Raum nicht weniger als drei Dimensionen enthält.“

Damit war der Bezug von Euklids XI, 3 und der Dreidimensionalität des gewöhnlichen Raumes explizit hergestellt. Allerdings erscheint XI, 3 nicht gerade als eine naheliegende und intuitiv einsichtige Formulierung für diesen Sachverhalt.

Insofern erstaunt es nicht, dass Friedrich Schur in seinen „Grundlagen der Geometrie“ einen etwas anderen Weg gegangen ist. In der mit „Postulate des Raumes“ überschriebenen Nummer 3, welche die Postulate der Geraden und Ebenen ergänzt, finden wir folgende Festsetzung (Schur 1909, 11):

„7. Postulat: Außerhalb jeder Ebene gibt es Punkte.“

Auf der Basis von 7. ist es Schur möglich, eine Art von konstruktiver Definition des Begriffes „Raum“ zu geben (Schur 1909, 11):

„3. Definition. Die Menge der Punkte derjenigen Geraden, welche erstens jeden von vier nicht in einer Ebene gelegenen Punkten mit den Punkten des durch die drei anderen bestimmten Dreiecks und zweitens die Punkte der Strecke durch je zwei der vier Punkte mit denjenigen der Strecke durch die beiden andern verbinden, heißt ein Raum.“

Man beachte, dass hier von einem Raum die Rede ist, dieser also durchaus Raum in einem Hyperraum sein könnte. Die Beschränkung auf das Dreidimensionale kommt erst in Verbindung mit dem folgenden Axiom (Schur 1909, 13):

„8. Außerhalb eines Raumes gibt es keine Punkte.“

Schurs Beweis des Satzes XI, 3 beruht auf folgendem Satz (Schur 1909, 12):

„10. Satz. Ein Raum wird durch jede Ebene desselben so in zwei Teile geteilt, dass die Strecke von einem Punkt des einen Teiles nach einem

Punkte des andern stets einen Punkt der Ebene enthält, diejenige von einem Punkte des einen Teils nach einem Punkt desselben aber keinen.“

Der Beweis hierfür ergibt sich aus Schurs Definition 3 unter Zuhilfenahme des folgenden Sachverhalts: Ist ein Raum im Sinne der genannten Definition gegeben, so zerlegen die Ebenen, welche von je drei der vier vorgegebenen Punkte A, B, C und D – man könnte sie Fundamentalpunkte nennen – festgelegt werden, den fraglichen Raum in genau 15 verschiedene Teile: zum einen die Pyramide ABCD, sodann 4 „unendliche Pyramiden“, welche ihre Spitze jeweils in einem Eckpunkt der Pyramide haben, 4 „abgestumpfte unendliche Pyramidenstümpfe“ über den Seitenflächen der Pyramide sowie 6 unendliche „Keile“ über den Pyramidenkanten; dies wird ausführlich beschrieben im § 34 von Möbius’ „Barycentrischem Calcul“ (Möbius 1827, 39). Die Pyramide ABCD heißt bei Möbius „Fundamentalpyramide“; ihm geht es dabei um die Einführung von baryzentrischen Koordinaten im Raum. Nun kann man einen beliebigen Punkt P des Raumes vorgeben, sich seine möglichen Lagen in Bezug auf die genannten 15 Bereiche überlegen und dann ganz konkret argumentieren (Schur 1909, 12f). Allerdings scheint dieser „Beweis“ zirkulär, denn die Zerlegung des Raumes in die genannten 15 Bereiche setzt ja schon voraus, dass die fraglichen Ebenen den Raum in zwei Halbräume zerlegen.

Euklid XI, 3 lässt sich nun in der schon oben gesehenen Weise begründen. Schurs Analyse des Problems legt eigentlich die Lösung nahe, die Zerlegung des Raumes durch Ebenen in Halbräume als Axiom zu wählen und auf dessen Basis Euklid XI, 3 zu beweisen. Dadurch würde auch sofort klar, warum die Verhältnisse im vierdimensionalen Raum anders liegen. Diese Lösung findet sich in der Tat in einer etwas raffinierteren Form in A. N. Whiteheads „The axioms of descriptive geometry“ (1907): „For three-dimensional geometry two other axioms are requested: XV. A point can be found external to any plane. ... XVI. Given any plane p , and any point A outside it, and any point Q on it, and any point B on the prolongation AQ, then, if X is any other point [on the straight line through A and B], either X lies on the plane p , or AX intersects the plane p , or BX intersects the plane p Axiom XVI secures the limitation to three dimensions, and the division of space by a plane. It can also be proved from the axioms that, if two planes intersect in at least one point, they intersect in a straight line“ (Whitehead 1907, 6).

Damit ist die Geschichte von Euklid XI, 3 zu einem relativen Ende gelangt, insofern dieser Satz nun seine systematische Stellung im Gesamt einer Axiomatik der räumlichen Geometrie gefunden hat; insbesondere ist seine wahre „raison d’être“ gefunden – die Tatsache nämlich, dass Ebenen den Raum zerlegen. Von einem formalistischen Standpunkt aus ist letztere Aussage natürlich nicht nachvollziehbar, denn aus dieser Sicht ist jedes konsistente und vollständige Axiomensystem zulässig. Dennoch zeigt gerade die

Geschichte, dass diese Position nicht diejenige ist, welche die Praxis der Geometer leitet(e).

Anmerkungen

- ¹ Viele der Überlegungen, welche im Nachfolgenden dargelegt werden, gehen auf einen Forschungsaufenthalt im Frühjahr 2007 am Archiv Henri Poincaré an der Universität Nancy 2 zurück. Ich möchte allen Beteiligten für diese Möglichkeit und für die freundliche Aufnahme danken, insbesondere Gerhard Heinzmann, Philippe Lombard und Philippe Nabonnand.
- ² Hiermit soll nicht bestritten werden, dass besonders die Frage nach der Natur des Raumes in der Philosophie und in den Naturwissenschaften und ihren Vorläufern eine wichtige Rolle spielte – man denke etwa an die einschlägige Debatte zum Thema „absoluter“ versus „relativer“ Raum. Zu diesen Aspekten vgl. man den Klassiker „Concepts of Space“ von M. Jammer (²1993).
- ³ Im Französischen und Englischen wurde anscheinend schon früher als im Deutschen der Begriff „Dimension“ allgemein verwendet, während im Deutschen eher „Abmessung“ gebräuchlich war; so enthält auch Huttons „Mathematical and philosophical dictionary“ (1796) einen Eintrag „Dimension“.
- ⁴ Es liegt nahe, hier einen Einfluss der elementaren analytischen Geometrie anzunehmen, die sich ja erst um 1800 herum entfaltete (Lagrange, Monge, Lacroix, Biot). Dies soll in einer Dissertation von Jan Schmidt (Köln) genauer untersucht werden.
- ⁵ Legendre 1817, 139; Lacroix 1819, 131. Letzterer verwendet ausdrücklich die Eigenschaft, dass eine Gerade, die zwei (nicht identische) Punkte mit einer Ebene gemeinsam hat, ganz in dieser liegen muss (Lacroix 1819, 131), was bei ihm aus der Wesensart der Geraden und Ebenen folgt („... la ligne droite s'applique exactement au plan dans tous les sens ...“ (ebd.) – vgl. auch Definition VI auf Seite 1f). Legendre dagegen stützt sich auf das Korollar 1 zu Satz II des fünften Buches (Legendre 1817, 138), welches in moderner Ausdrucksweise besagt, dass drei nicht kollineare Punkte eine Ebene festlegen. Übrigens gibt es bei Legendre auch eine Definition des „Ausgedehnten“: „L'étendue a trois dimensions, longueur, largeur et hauteur.“ (Legendre 1817, 1). Es ist wohl angebracht, „étendue“ hier mit „Körper“ gleichzusetzen und nicht an den abstrakten Raum zu denken. „L'étendue“ hat sicher einen Bezug zu Descartes' „res extensa“ (ich danke J. P. Friedelmeyer [Osenbach] für diesen Hinweis). Auch bei Lacroix kommt noch „Raum“ in elementarer oder konkreter Bedeutung vor: „L'espace que les corps occupent a nécessairement trois dimensions, ...“ (Lacroix 1819, 1) – unter der Überschrift „Notions générales sur l'étendue“.
- ⁶ Eine Analyse der stereometrischen Bücher gibt Vitrac in seiner Euklid-Ausgabe. Eine ausführliche Arbeit zur logischen Struktur der stereometrischen Bücher stammt von Neuenschwander. Nach Neuenschwander findet der Satz XI, 3 in folgenden Sätzen des XI. Buches Verwendung: 5, 6, 7, 13, 14, 16, 17 und 38 (Neuenschwander 1974, 93f.). Allerdings ist zu beachten, dass nicht alle der genannten Verwendungen unumgänglich sind. So zitiert z. B. Euklid im Beweis von XI, 14 den Satz XI, 3; da aber die in diesem Satz formulierte Eigenschaft („Ebenen, auf denen dieselbe Gerade senkrecht steht, sind parallel.“ [Euklid 1973, 326]) unabhängig von der Dreidimensionalität ist, müsste ein anderer Beweis zu finden sein.

Literatur

- Baltzer, Richard (²1867). *Die Elemente der Mathematik. Zweiter Band Planimetrie, Stereometrie, Trigonometrie*. Leipzig: Hirzel.
- Bézout, Etienne (1812). *Cours de mathématique à l'usage de la Marine et de l'Artillerie. Seconde partie contenant la géométrie, la trigonométrie rectiligne et la trigonométrie sphérique. Notes sur la géométrie. Éléments de géométrie descriptive et problèmes par A.-A.-L. Reynaud*. Paris: Courcier.
- Boyer, Charles (1956). *History of Analytic Geometry*. New York: Scripta,
- Crilly, T. / Johnson, D. M. (1999). The Emergence of Topological Dimension Theory. *History of Topology*, ed. by I. M. James. Amsterdam: Elsevier, 1–24.
- Ersch, Samuel / Gruber, Johann Gottfried (1818). *Allgemeine Encyclopädie der Wissenschaften und Künste, in alphabetischer Folge. Erster Theil*. Leipzig: Gleditsch.
- Euclide (2001). *Les Éléments. Volume 4. Livres XI-XIII, Géométrie des solides*. Traduction et commentaires par Bernard Vitrac. Paris: Presses Universitaires de France.
- Euklid (1973). *Die Elemente*. Nach Heibergs Text aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben von Clemens Thaer. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.
- Hérigone, Pierre (1634). *Cursus mathematicus ... / Cours mathématique ...*. Paris: le Gras, [digitalisiert bei „Gallica“ zu finden].
- Hilbert, David (¹1972). *Grundlagen der Geometrie*. Stuttgart: Teubner.
- Jammer, Max (²1993). *Concepts of Space. The History of Theories of Space in Physics*. New York: Dover.
- Kern, Stephen (1983). *The Culture of Time and Space 1880–1918*. London: Weidenfeld and Nicolson.
- Klügel, Georg Simon (1803). *Mathematisches Wörterbuch. Erste Abtheilung. Die reine Mathematik*. Erster Theil von A bis D mit acht Kupferstichen. Leipzig: Schwickert.
- Lacroix, Sylvestre F. (¹1819). *Éléments de géométrie à l'usage de l'École Centrale des Quatre-Nations*. Paris: Courcier,
- Legendre, Adrien Marie (¹1817). *Éléments de géométrie*. Paris: Didot.
- Leibniz, Gottfried Wilhelm (1985). *Die Theodizee von der Güte Gottes, der Freiheit des Menschen und vom Ursprung des Übels*. Philosophische Schriften Band II, zweite Hälfte, herausgegeben und übersetzt von H. Hering. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.
- Möbius, August Ferdinand (1827, Reprint 1976). *Der baryzentrische Calkül*. Leipzig: A. Barth, Reprint Hildesheim, New York: Olms.
- Neuenschwander, Erwin (1974). Die stereometrischen Bücher der Elemente des Euklid. *Archive for History of Exact Sciences* 14, 9–125.
- Pasch, Moritz (1925). Dimension und Raum in der Mathematik. *Annalen der Philosophie* 5, 109–120.
- Pasch, Moritz (1976). *Vorlesungen über neuere Geometrie*. Berlin u.a.: Springer, Nachdruck der Ausgabe Berlin (²1926).
- Schur, Friedrich (1909). *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig und Berlin: Teubner.
- Staudt, Christian von (1847). *Geometrie der Lage*. Nürnberg: Korn.
- Tropfke, Johannes (³1940). *Geschichte der Elementarmathematik. Band 4 „Ebene Geometrie“*, bearbeitet von K. Vogel. Berlin: De Gruyter.
- Verdun, Andreas (2003). Leonhard Eulers Einführung und Anwendung von Bezugssystemen in Mechanik und Astronomie. *Elemente der Mathematik* 58, 169–176.
- Voelke, Jean-Daniel (2005). *Renaissance de la géométrie non euclidienne entre 1860 et 1900*. Bern u.a.: P. Lang.

Whitehead, Alfred North (1907). *The Axioms of Descriptive Geometry*. Cambridge: The University Press.

Wolff, Christian (1716). *Mathematisches Lexicon*. Leipzig: Gleditsches sel. Sohn, zitiert nach: *Gesammelte Werke*, 1. Abteilung: Deutsche Schriften. Band 11, hg. und bearbeitet von J. E. Hofmann (1978). Hildesheim, New York: Olms.

Horst Struve
Universität zu Köln

Didaktische Probleme der Analysis und ihr historischer Ursprung

Summary

In this article we discuss some didactical problems of the calculus and show that they have their origin in the historical development of the calculus.

Die Mathematical Association of America publizierte 1974 den Band Apostol (1969) zur Didaktik der Analysis. Die *Selected Papers on Calculus* beinhaltet eine Sammlung von Artikeln aus den Zeitschriften *American Mathematical Monthly* und *Mathematics Magazine*, in denen es um die Bedeutung und Verwendung von Differentialen geht. In dem folgenden Beitrag wird versucht, diese Probleme aus der historischen Entstehung des calculus zu erklären.

Nachdem wir in Abschnitt 1 die moderne Auffassung des Differentialbegriffs skizziert haben, stellen wir in Abschnitt 2 die mit dem Differentialbegriff verbundenen Probleme dar, die in den *Selected Papers on Calculus* diskutiert werden. Der Begriff des Differentials wurde von Leibniz in die Mathematik eingeführt. Abschnitt 3 beschreibt den Leibnizschen *calculus differentialis* und *calculus integralis*, so wie diese im ersten Lehrbuch der Analysis dargestellt wurden, den Vorlesungen *Die Differentialrechnung* und *Die erste Integralrechnung* von Johann Bernoulli aus den Jahren 1691/92 (J. Bernoulli 1924 und 1914). Abschnitt 4 unseres Beitrages enthält eine Rekonstruktion des Leibnizschen calculus, in der wir nachweisen, dass dieser eine konsistente Theorie ist. Dazu konstruieren wir ein analytisches Modell des Leibnizschen calculus (vgl. hierzu Burscheid / Struve 2001 und 2002). Im letzten Abschnitt diskutieren wir die mit dem Differentialbegriff verbundenen Probleme vor dem Hintergrund dieser Rekonstruktion. – Herrn Professor Hans Joachim Burscheid und Herrn Ingo Witzke (Universität zu Köln) danke ich für wertvolle Hinweise.

1 Die moderne Auffassung

Was ist ein Differential? Ausgangspunkt für die moderne Auffassung, so wie man sie beispielsweise in Walter (1992, 245) findet, ist der folgende Satz:

Eine in einer Umgebung U der Stelle x definierte Funktion f ist genau dann an dieser Stelle differenzierbar, wenn es eine Konstante c und eine Funktion $\varepsilon(h)$ derart gibt, dass (für $x+h \in U$)

$$f(x+h) = f(x) + ch + h \varepsilon(h) \quad \text{und} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0 \text{ ist.}$$

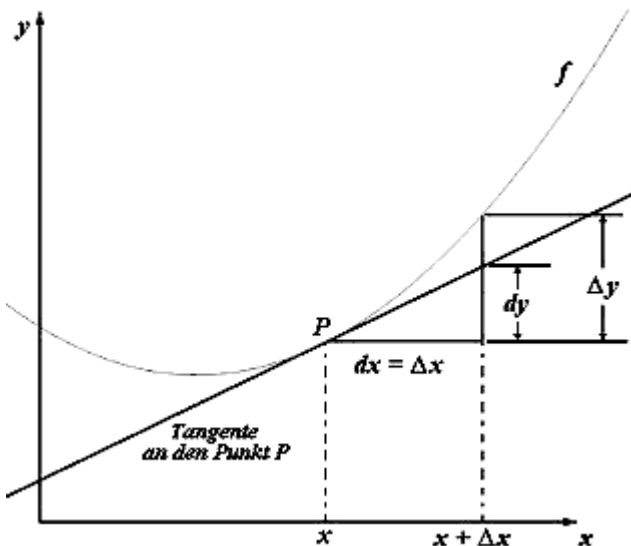
Es ist dann $f'(x) = c$.

Der Zuwachs $\Delta f = f(x+h) - f(x)$ wird in zwei Terme zerlegt, einen linearen Hauptterm $ch = f'(x)h$ und einen Rest von der Größe $h \varepsilon(h)$. Der Hauptteil ist eine lineare Funktion von h , die als Differential df der Funktion f (im Punkt x) bezeichnet wird. Auch den Zuwachs der unabhängigen Variablen x nennt man ein Differential und bezeichnet es mit dx statt h . Nach Definition gilt dann

$$df = f'(x) dx \quad \text{bzw. mit } y = f(x) \text{ auch } dy = f'(x) dx.$$

Das Differential einer Funktion f ist eine Funktion $dy = df(x, dx)$ von zwei Variablen x und dx (oder h).

Der Zuwachs h der unabhängigen Variablen x wird in der Literatur auch häufig mit Δx bezeichnet (vgl. Courant 1971, 97), so dass dann $\Delta x = dx$ ist. Mit $y = f(x)$ und $\Delta y = \Delta f$ ergibt sich für den Zuwachs der Funktion f die Gleichung $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. In der folgenden Abbildung (vgl. Farbbild 15) sind die genannten Objekte bezogen auf einen Punkt P mit Abszisse x veranschaulicht.



Fassen wir den Status der bislang vorgekommenen mathematischen Objekte noch einmal zusammen (wobei wir der Einfachheit halber von einer Funktion f ausgehen, deren Definitionsbereich die Menge \mathbf{R} ist):

| Symbol | Bezeichnung | Status |
|-------------------|---------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| f | Funktion | Funktion von \mathbf{R} nach \mathbf{R} |
| x | unabhängige Variable x | Variable für eine beliebige reelle Zahl |
| y = f(x) | abhängige Variable y | reelle Zahl, Wert der Funktion f an der Stelle x |
| dx = Δx | Differential von x Zuwachs von x | Variable für eine beliebige reelle Zahl |
| Δy = Δf | Zuwachs f(x+Δx) – f(x) | Funktion von x und Δx (von $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ nach \mathbf{R}) |
| dy = df(x, dx) | Differential von y, linearer Anteil am Zuwachs Δy von y | Funktion von x und dx (von $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ nach \mathbf{R}) |

Es sei angemerkt, dass in der Literatur häufig eine gewisse Ambiguität in der Bedeutung von Bezeichnungen der Art $f(x)$ besteht: Ist eine Funktion, die von einer unabhängigen Variablen x abhängt gemeint oder der Wert dieser Funktion an der Stelle x ? Taylor (1974, 380 f.) konstatiert diese Zweideutigkeit durchgehend in der Geschichte des calculus. Er schlägt vor, Funktionen $x \rightarrow f(x)$ mit f zu bezeichnen und $f(x)$ für den Wert einer Funktion an der Stelle x zu reservieren. In diesem Sinne ist $df: (x, dx) \rightarrow f'(x) dx$.

2 Probleme des Umgangs mit Differentialen

In den Zeitschriften *American Mathematical Monthly* und *Mathematics Magazine* werden die folgenden Probleme im Zusammenhang mit dem Differentialbegriff angesprochen:

(1) In Lehrbüchern findet man häufig die Gleichung $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$. Wegen $\Delta x = dx$ ist sie äquivalent zu $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{dx} = \frac{dy}{dx}$. Auf beiden Seiten der Gleichung stehen Quotienten, deren Zähler (Δy und dy) Funktionen von zwei Variablen sind (x und dx) und deren Nenner die Variable dx ist. Um einen sinnvollen mathematischen Ausdruck zu erhalten, muss man dx als eine Funktion betrachten und damit die Quotienten als Quotienten zweier Funktionen. Dieser Quotient ist dann wiederum eine Funktion. Problematisch erscheint, dass nicht etwa die Gleichheit dieser Funktionen behauptet wird, sondern von einer dieser beiden Quotientenfunktionen ein Grenzwert gebildet wird ($\Delta x \rightarrow 0$), von der anderen Funktion aber nicht – in den Worten von Kac / Randolph (1942): „The unsophisticated undergraduate... may admire the cleverness of dx for being able to remain constant on one side of an equation and (since $dx = \Delta x$) approach zero on the other.“ Etwas gewählter

formuliert es A. Church (1942): „If dx is identified with Δx , the same variable Δx appears in the equation in two different roles, on the left as a free variable and on the right as a bound variable.“

Die intendierte Bedeutung der Gleichung $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ erkennt man vielleicht am besten, wenn man ihre Begründung analysiert. Die linke Seite der Gleichung ist bekanntlich der Wert der Ableitung f' an der Stelle x , also $f'(x)$. Die rechte Seite der Gleichung liefert ebenfalls $f'(x)$, wenn man die (oben angegebene) Gleichung $dy = f'(x) dx$ nach $f'(x)$ auflöst.

Betrachten wir hierzu ein Beispiel: Es sei $f: x \rightarrow x^2$. Dann ist $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = (x + dx)^2 - x^2 = 2x dx + dx^2$ und $dy = 2x dx$. Es folgt $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x dx + dx^2}{dx} = 2x + dx$, also $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$ und ebenfalls $\frac{dy}{dx} = \frac{2x dx}{dx} = 2x$.

Wie aber muss man die hier auftretenden Symbole interpretieren?

Die Funktion $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ betrachtet man bei der Grenzwertbildung $\Delta x (= dx) \rightarrow 0$ als eine Funktion, die nur von $\Delta x (= dx)$ abhängt. Dies bedeutet, dass auch Δy als eine Funktion angesehen wird, die nur von $\Delta x (= dx)$ abhängt: Δy wird an der „Stelle“ x betrachtet. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bezeichnet dann den (von $\Delta x = dx$ abhängigen) Wert der Quotientenfunktion an der Stelle x . Man bestimmt den Grenzwert dieser Funktion (von einer unabhängigen Variablen) für $dx \rightarrow 0$. Das Ergebnis ist ein Term in x , der Grenzwert von Sekantensteigungen (vgl. obige Figur). Die rechte Seite der Gleichung $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ erhält man durch Umformung der Beziehung $dy = f'(x) dx$. Durch diese Gleichung wird das Differential dy als Funktion von x und dx beschrieben (bzw. definiert). Die Bildung des Quotienten von dy und dx macht in unserem Kontext nur Sinn, wenn man dy als Funktion von dx an der Stelle x betrachtet. Die von dx abhängige Funktion $dy(dx)$ an der Stelle x ist eine lineare Funktion, die Quotientenfunktion $\frac{dy}{dx}$ eine konstante Funktion. Die Konstante gibt die Steigung der Tangente an der Stelle x an. Diese Steigung ist gleich dem Grenzwert (der Sekantensteigungen) auf der linken Seite der Gleichung.

Mit Blick auf die Bedeutung der Symbole können wir festhalten, dass die diskutierte Gleichung durchaus problematisch ist. Die linke Seite gibt den Grenzwert einer Funktion an, die rechte Seite den Wert einer konstanten Funktion. In unserem Beispiel lautet die Gleichung: $2x = 2x$. Die linke Seite ist der Grenzwert der Funktion $\frac{2x dx + dx^2}{dx}$ für $dx \rightarrow 0$, die rechte Seite gibt

den Wert der (von dx abhängigen) Funktion $\frac{dy}{dx} \left(= \frac{2x dx}{dx} \right)$ an einer beliebigen Stelle dx an. Die numerischen Werte stimmen überein, die bezeichneten mathematischen Objekte nicht.

(2) Interpretation von Regeln des calculus differentialis

Es gibt einige Regeln der Differentialrechnung, die in der Formulierung mit Differentialen eine bestechend einfache Form annehmen. Zwei Beispiele seien genannt (vgl. Courant 1971, 136, 128):

Die sog. *Kettenregel* besagt: Man erhält die Ableitung der zusammengesetzten Funktion als Produkt der Ableitungen der bei der Zusammensetzung benutzten Funktionen. Mit Hilfe von Differentialen lässt sich die Regel wie folgt formulieren:

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$. Als Beispiel betrachten wir die Funktion $y = \sin^2 x$. Mit $u(x) = \sin x$ ist $\frac{dy}{du} = 2u$ und $\frac{du}{dx} = \cos x$, also $\frac{dy}{dx} = 2u \cos x = 2 \sin x \cos x$.

Die Regel zur *Differentiation der Umkehrfunktion* lautet: Zwischen dem Differentialquotienten der gegebenen Funktion $y = f(x)$ und dem der Umkehrfunktion $x = \varphi(y)$ besteht für zusammengehörige Werte x, y die Beziehung $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$. Ist beispielsweise $y = x^2$, so gilt $\frac{dy}{dx} = 2x$ und die Umkehrfunktion $x = \sqrt{y}$ hat die Ableitung $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2y^{1/2}}$.

Die Verwendung von Differentialen bei der Formulierung dieser Aussagen zeigt primae facie deren Plausibilität – und für einige Schüler und Studierende wohl auch aufgrund der Analogie zu Bruchrechengesetzen deren Gültigkeit. Schaut man genauer hin, so zeigen sich Probleme. In beiden Gleichungen besitzen gleichbezeichnete Differentiale verschiedene Bedeutungen. So bezeichnet in der Kettenregel $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$ der „Bruch“ $\frac{dy}{du}$ die

Ableitung der Funktion $y(u)$ nach der unabhängigen Variablen u . $\frac{du}{dx}$ symbolisiert aber die Ableitung der abhängigen Variablen u nach der unabhängigen x . du bezeichnet einmal das Differential einer unabhängigen Variablen, das andere mal das Differential einer abhängigen Variablen. Dies sind aber verschiedene mathematische Objekte. – Entsprechend gilt: In der Gleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ bedeutet $\frac{dy}{dx}$ die Ableitung der Funktion $y(x)$ nach der

unabhängigen Variablen x , $\frac{dx}{dy}$ die Ableitung der Umkehrfunktion $x(y)$ nach der abhängigen Variablen y .

Die Verwirrung entsteht durch die Verwendung von Differentialen, die in beiden Gleichungen gleichbezeichnete Differentiale verwenden. In der Kettenregel $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$ bezeichnet $\frac{dy}{du}$ die Ableitung der Funktion $y(u)$ nach der unabhängigen Variablen u , $\frac{du}{dx}$ die Ableitung der Umkehrfunktion $u(x)$ nach der unabhängigen Variablen x . In der Gleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ bezeichnet $\frac{dy}{dx}$ die Ableitung der Funktion $y(x)$ nach der unabhängigen Variablen x , $\frac{dx}{dy}$ die Ableitung der Umkehrfunktion $x(y)$ nach der abhängigen Variablen y .

unabhängigen Variablen x , während $\frac{dx}{dy}$ die Ableitung der Umkehrfunktion $x(y)$ nach der unabhängigen Variablen y denotiert. Man wendet also Bruchrechengesetze auf Symbole an, die unterschiedliches bezeichnen.

(3) $\int f(x)dx$: Was für einen Sinn hat diese Schreibweise, wenn dx eine von x unabhängige Variable ist? Wechselt man die Bezeichnung von dx und setzt $dx = z$ (was erlaubt ist, wenn x und dx voneinander unabhängige Variablen sind), so erhält man $\int f(x)dx = \int f(x)z$. Warum sollte dann aber das Integral von zwei unabhängigen Variablen x und z das in der Theorie geforderte Resultat liefern, etwa $\int xz = \frac{1}{2}x^2 + C$ (C die Integrationskonstante)?

(4) Hat das Differential „ dx “ in der Differentialrechnung dieselbe Bedeutung wie in der Integralrechnung? Hintergrund dieser Frage ist die Beobachtung, dass in dem Ausdruck $\int f(x)dx$ das Differential dx nach moderner Auffassung überflüssig ist. Einige Autoren schreiben auch nur $\int f$, wenn wie in dem hier betrachteten Fall klar ist, dass f eine Funktion von einer einzigen unabhängigen Variablen, der Integrationsveränderlichen, ist. Walter (1992, 277) begründet die Zweckmäßigkeit der „zunächst umständlich erscheinenden Schreibweise“ $\int f(x)dx$ mit der eingängigen Formulierbarkeit der Substitutionsegel („... das rein formale Rechnen mit Differentialen liefert das richtige Ergebnis“ – vgl. unsere Ausführungen in (5)).

(5) Interpretation von Regeln des calculus integralis
Auch einige Regeln der Integralrechnung haben eine besonders einprägsame Darstellung, wenn man Differentiale verwendet. Hierzu gehören die folgenden:

Die *Substitutionsregel* $\int f(x)dx = \int f(\varphi(u))\varphi'(u)du$ mit $x = \varphi(u)$ (vgl. Walter (1992, 277) lautet bei Verwendung von Differentialen $\int f(x)dx = \int f(x(u))\frac{dx}{du}du$. Diese Formulierung legt auch schon einen Beweis der Regel nahe, nämlich durch „Kürzen“ von du .

Die Methode der *Trennung der Variablen* zum Lösen von Differentialgleichungen erster Ordnung der Art $y'g(y) = f(x)$: Setzt man $y' = \frac{dy}{dx}$, so ist $\frac{dy}{dx}g(y) = f(x)$ und damit $f(x)dx = g(y)dy$. Lösungen der Differenti-

gleichung erhält man nun, indem man beide Seiten integriert:

$$\int f(x) dx = \int g(y) dy .$$

Der Eleganz dieser Umformungen steht die Frage nach ihrer Bedeutung und ihrer Beweiskraft gegenüber. Zur Substitutionsregel schreibt Allendoerfer (1952, 403-406): „The proof of this theorem does not consist of the observation that: $dx = (dx/du)du$; even though this collection of nonsense may be an aid to the memory, a crutch for poor students, and a convenience for the experienced mathematician.“ Die Methode der Trennung der Variablen bezeichnen Knobloch / Kappel (1974, 22) als ein „formales Rezept“, Courant (1972, 382) als eine „symbolische Schreibweise“. Mit Blick auf die moderne Bedeutung von Differentialen nur zu verständlich.

(6) Der Umgang mit Differentialen wäre effektiver, wenn Differentiale gleichberechtigt wären i. d. S., dass der Umgang mit ihnen symmetrisch wäre. In den Worten von Church (1942): „... one of the advantages in the use of differentials that various variables are symmetrically treated, without arbitrarily singling out one or more of them as the independent variable or variables.“ In der modernen Auffassung ist dies nicht gegeben (vgl. Abschnitt 1).

3 Der Leibnizsche calculus

Im Folgenden beschreiben wir Teile des Leibnizschen *calculus differentialis* und des *calculus integralis*, so wie sie im ersten Lehrbuch der Analysis dargestellt wurden, den Vorlesungen *Die Differentialrechnung* und *Die erste Integralrechnung* von Johann Bernoulli aus den Jahren 1691/92 (J. Bernoulli 1924 und 1914). Eine detaillierte Darstellung findet man in Burscheid / Struve (2001 und 2002).

Die Infinitesimalrechnung im 17. Jahrhundert wurde „within the body of the Cartesian analysis“ entwickelt, „which at that time may be characterised as the study of curves by means of algebraic techniques“ (Bos 1974/75, 4). Die untersuchten Kurven wurden nicht – wie heutzutage in der analytischen Geometrie –, mit Hilfe von Zahlen und Variablen definiert, sondern wurden durch Konstruktionen gegeben. Man vergleiche hierzu etwa die Figuren in *La Géométrie* von R. Descartes (1637), in denen zur Kurvenkonstruktion verwandte physikalische Hilfsmittel, etwa Holzlineale, realitätsnah wiedergegeben sind (vgl. auch Bos 1981). Erst nachträglich, d. h. nachdem die Konstruktionen durchgeführt worden sind, werden Koordinaten zur einfachen Beschreibung und Untersuchung der Kurven eingeführt. Variable wie „x“ und „y“ bezeichnen Größen, i. a. geometrische Größen, etwa Streckenlängen. Den Punkten einer Kurve lassen sich solche Größen, etwa die Länge x der Abszisse und die Länge y der Ordinate, zuordnen. Erst die Kurve definiert Relationen zwischen den Größen, die ihren Punkten zugeordnet sind. Die Zuordnungen sind grundsätzlich unabhängig voneinander. (Diese Unab-

hängigkeit wird in der heutigen Mathematik deutlich, wenn zur Beschreibung einer Kurve eine Parameterdarstellung gewählt wird. Ist etwa eine Parabel durch die Funktionen

$$x = t \text{ und } y = t^2 \text{ (} t \in \mathbf{R} \text{)}$$

gegeben, so legt diese Parabel die Beziehung $y = x^2$ zwischen den Längen x der Abszissen und den Längen y der Ordinaten der Kurvenpunkte fest. Und es ist nicht etwa so, dass die Gleichung $y = x^2$ die Parabel definiert.)

Die Abbildungen, die den Punkten einer Kurve C die Längen ihrer Abszissen bzw. ihrer Ordinaten zuordnen, bezeichnen wir als *Größenfunktionen*. Weitere von Bernoulli betrachtete Größenfunktionen sind die Bogenlänge, die nach Auszeichnung eines Punktes jedem Kurvenpunkt die Bogenlänge bezüglich des ausgezeichneten Punktes zuordnet, sowie solche Funktionen, die sich aus den genannten zusammensetzen. Größenfunktionen sind dann Abbildungen von C in \mathbf{R} .

Der erste Teil der *Differentialrechnung* beginnt mit den folgenden drei *Postulaten*:

1. *Eine Größe, die vermindert oder vermehrt wird um eine unendlich kleinere Größe, wird weder vermindert noch vermehrt.*
2. *Jede krumme Linie besteht aus unendlich vielen Geraden, die selbst unendlich klein sind.*
3. *Eine Figur, die zwischen zwei Ordinaten, der Differenz der Abszissen und dem unendlich kleinen Stück einer beliebigen Kurve enthalten ist, wird als Parallelogramm betrachtet.*

Über die korrekte Interpretation der Postulate ist viel und kontrovers diskutiert worden. Wir wollen diese Diskussion hier nicht aufgreifen, sondern halten nur fest, dass Bernoulli Differentiale als (unendlich kleine) Größen auffasst und jeder Größe γ ein (eindeutig bestimmtes) Differential $d\gamma$ zuordnet.

Nach der Formulierung von Postulaten beschreibt Bernoulli, wie die Differentiale von Größen bestimmt werden, die aus Konstanten und anderen Größen zusammengesetzt sind. Ist dabei eine Größe z aus anderen Größen x , y , ... zusammengesetzt, so ist auch das Differential von z aus den Differentialen von x , y , ... zusammengesetzt. Wir bezeichnen im Folgenden solche Größen, die nicht aus anderen Größen zusammengesetzt sind, als *atomare Größen*.

Zunächst betrachtet er, so kann man zusammenfassend sagen, den Fall, dass eine Größe z als ein Polynom der atomaren Größen x , y , ... ausgedrückt werden kann. Dann erhält man das Differential von $z = P(x, y, \dots)$, indem man die Differenz $P(x + dx, y + dy, \dots) - P(x, y, \dots)$ berechnet und in diesem Polynom in x , dx , y , dy , ... alle Glieder, in denen Produkte von Differentialen vorkommen, streicht. (Hierbei beruft sich Bernoulli auf Postulat 1.) Die-

se Regel bezeichnen wir im Folgenden als *Polynomregel*. Sie lässt sich aufgliedern in eine Summen-, eine Produkt- und eine Konstantenregel.

Beispiele:

- (a) Summenregel (Bernoulli 1924, 11): Das Differential von $x + y$ ist

$$[(x + dx) + (y + dy)] - [x + y] = dx + dy .$$

- (b) Produktregel (Bernoulli 1924, 12): Um das Differential von xy zu bestimmen, berechnet man zunächst

$$[(x + dx) \cdot (y + dy)] - [xy] = x dy + y dx + dx dy .$$

Hieraus ergibt sich als Differential von xy die Größe $x dy + y dx$.

- (c) Konstantenregel (Bernoulli 1924, 11 f.):

Das Differential von $x + a$ (a eine Konstante) ist

$$[(x + dx + a)] - [x + a] = dx .$$

Das Differential von ax (a eine Konstante) ist

$$[a(x + dx)] - [ax] = a dx .$$

- (d) (Bernoulli 1924, 12) Um das Differential von x^3 zu bestimmen, berechnet man zunächst die Differenz

$$(x + dx)^3 - x^3 = 3x^2 dx + 3x (dx)^2 + (dx)^3 .$$

Die Glieder mit Produkten in dx sind $3x (dx)^2$ und $(dx)^3$. Lässt man diese weg, so ergibt sich als Differential von x^3 gerade $3x^2 dx$.

Im Folgenden bestimmt Bernoulli die Differentiale von Größen γ , die so von atomaren Größen x, y, \dots abhängen, dass diese Abhängigkeit erst nach einer algebraischen Umformung durch ein Polynom $P(\gamma, x, y, \dots)$ in γ, x, y, \dots ausgedrückt werden kann. Dann erhält man das Differential von γ , indem man das Differential von $P(\gamma, x, y, \dots)$ bestimmt und nach $d\gamma$ auflöst. Hierzu benutzt Bernoulli die vorher aufgestellten Regeln.

Beispiel:

- (e) Quotientenregel (Bernoulli 1924, 12 f.): Zur Bestimmung des Differentials von x/y bezeichnet man die Größe x/y mit z , so dass $x = yz$ gilt. Nach der Regel für Produkte (Beispiel (b) von oben) folgt

$$dx = y dz + z dy ,$$

also

$$dx = y dz + (x/y) dy \quad \text{oder} \quad y dz = dx - (x/y) dy ,$$

und damit

$$dz = (dx - (x/y) dy) / y \quad \text{oder} \quad dz = (y dx - x dy) / y^2 .$$

Wir kommen zur Definition der Integrale, die Bernoulli am Anfang seiner Integralrechnung gibt. Er schreibt (Bernoulli 1914, 3):

Jetzt werden wir umgekehrt zeigen, wie die Integrale der Differentiale gefunden werden, d.h. diejenigen Größen, von denen die Differentiale herrühren.

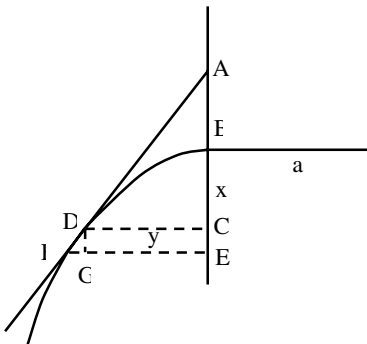
Ein Integral einer Größe x fasst Bernoulli also als eine Größe y auf, deren Differential dy gerade x ist. Mit y ist daher – gemäß den Regeln der Differentialrechnung – auch $y + c$ (c eine Konstante) ein Integral von x . Bernoulli gibt die folgenden ersten Beispiele für Differentiale und damit Integrale

... dass dx das Differential von x ist und $x dx$ das Differential von $\frac{1}{2} x^2$ oder $\frac{1}{2} x^2 +$ oder – einer konstanten Größe, $x^2 dx$ das Differential von $\frac{1}{3} x^3$ oder $\frac{1}{3} x^3 +$ oder – usw. ... Hieraus lässt sich die folgende allgemeine Regel bilden: $a x^p dx$ ist das Differential von $\frac{a}{p+1} x^{p+1}$.

Integration bedeutet also im Leibnizschen calculus nach Definition Antidifferentiation. Schon hier wird deutlich, dass die Schreibweise $\int f(x)dx$ einen wohldefinierten Sinn erhält: Das Integral von $f(x)$ existiert i. a. nicht, nur das Integral von $f(x) dx$. So ist $\int 3x^2 dx = x^3$; denn das Differential von x^3 ist, wie oben berechnet, $3x^2 dx$. Das Integral von $3x^2$, also $\int 3x^2$ existiert dagegen nicht; denn es gibt keine Größe, deren – entsprechend den Leibnizschen Regeln gebildetes – Differential $3x^2$ ist.

Wie Differentiale von Bernoulli angewandt wurden, zeigen wir im Folgenden anhand von einigen Beispielen. Im ersten geht es um die Konstruktion von Tangenten, im zweiten um die Bestimmung von Flächeninhalten.

Die Tangente der Parabel zu finden:

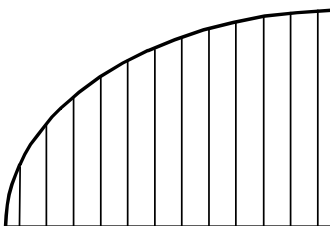


Nach der Erklärung der Parabel ist $ax = y^2$, also auch $a dx = 2y dy$ oder $a : 2y = dy / dx$ und da nach Postulat 2 angenommen wird, daß jede Kurve aus unendlich vielen geraden Linien besteht, so wird die Tangente AD und das unendlich kleine Stück DF der Parabel BDF eine Gerade sein. Zieht man daher DG parallel dem Durchmesser AE , so wird $\triangle DGF \approx \triangle ACD$ [\approx bedeutet „ähnlich“; H. S.]. Daher ist $FG : GD = CD : AC$ und bedeutet s die Subtangente, so ist $dy / dx = y / s = a / 2y$ (nach dem Vorangehenden); demnach $s = 2y^2 / a = 2ax / a = 2x$. Wenn daher AC doppelt so groß wie die Abszisse BC des Kurvenpunktes D genommen wird und durch A die Gerade AD gezogen wird, so ist sie die Tangente, die zu finden war.

Die Ordinate y eines Kurvenpunktes, die Subtangente s und der Tangentenabschnitt t (der durch den Kurvenpunkt und den Schnittpunkt der Tangente mit der x -Achse begrenzt ist) bilden ein rechtwinkliges Dreieck. Dieses Dreieck, so postuliert Bernoulli, ist ähnlich zu dem „charakteristischen Dreieck“ (Leibniz), das aus dy , dx und der gemäß Postulat 2 „unendlich kleinen Geraden“ besteht, aus der „jede krumme Linie besteht“. Dies ist nach Leibniz das Differential df der Bogenlänge f . Daher gilt $dy : dx : df = y : s : t$. Der Quotient dy/dx gibt die Tangentensteigung y/s an. Es sei angemerkt, dass aus der zuletzt genannten Verhältnisgleichung die Beziehung $(dx)^2 + (dy)^2 = (df)^2$ folgt, die Bernoulli verwendet, um Bogenlängen zu berechnen.

In seiner Integralrechnung beschreibt Bernoulli wie man mit Hilfe geeigneter „Zerlegungen in unendlich viele Teile“ den Inhalt von Flächen bestimmen kann (Bernoulli 1914, 11):

Man betrachtet aber die Flächen zerlegt in unendlich viele Teile, deren jeder als Differential der Fläche angesehen werden kann. Wenn man also das Integral dieses Differentials, d.h. die Summe dieser Teile hat, so wird daraus auch die gesuchte Quadratur bekannt.



Die Summe aller Teilflächen, so die Vorstellung von Bernoulli, ergibt dann die gesuchte Gesamtfläche. Die Summe zu bilden bedeutet aber gerade zu integrieren:

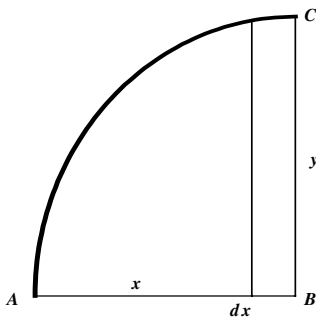
... wenn man nachher die Gesamtfläche haben will, von einem der unendlich kleinen Teile den Wert suchen, der nur aus bestimmtem Buchstaben und einer einzigen Art von Unbestimmten besteht ... Von dieser Größe als Differential ist dann das Integral zu finden, das die Quadratur der Fläche bedeutet.

Unter Bezug auf die in obiger Figur angegebene Flächeneinteilung fährt Bernoulli fort:

Wenn die Teilungen der Fläche parallel sind, so wird das Differential der Fläche, wenn x als Abszisse und y als Ordinate gedacht ist, $y \, dx$ sein, nämlich das Rechteck aus der Ordinate und dem Differential der Abszisse.

Bernoulli sieht $y \, dx$ als Flächeninhalt eines unendlich kleinen Rechtecks an, deren Summe – im Sinne von Integral – dann die Quadratur der Fläche liefert. Am Beispiel der Parabel zeigt Bernoulli, dass dieses Vorgehen das gewünschte Ergebnis liefert (Bernoulli 1914, 14).

Es sei z.B. AC eine Parabel und daher $ax = y^2$ oder $y = \sqrt{ax}$. Dann wird $y \, dx = dx \sqrt{ax}$. Das Integral hiervon, das $\frac{2}{3}x \sqrt{ax}$ oder $\frac{2}{3}xy$ lautet, ist die gesuchte Fläche.



Die Integration einer Größe liefert unendlich viele Größen, die sich lediglich durch Konstanten voneinander unterscheiden. Welche gibt nun den gesuchten Flächeninhalt an? Die korrekte Integrationskonstante, wie wir heute sagen, findet man nach folgender Regel:

Man muss die Fläche, für die man das Integral gefunden hat, gleich Null annehmen. Wenn alsdann das Integral, das aus dieser Annahme hervorgeht, ... eine positive Größe bleibt, so ist eben diese Größe von allen anderen Integralen abzuziehen...

Wendet man diese Regel auf das Beispiel der Parabel an (was Bernoulli nicht tut), so wählt man y zunächst so, dass die Fläche der Parabel den Wert Null annimmt. Dies ist für $x = 0$ der Fall. Nun berechnet man den Wert des gefundenen Integrals für $x = 0$. Dieser ist $\frac{2}{3} \cdot 0 \cdot \sqrt{a \cdot 0} = 0$, d. h. die Integrationskonstante ist hier 0.

Man kann die Leibnizsche Theorie, so weit sie hier dargestellt wurde, in den folgenden Punkten zusammenfassen:

Ausgangspunkt ist eine Kurve, die über ihre Konstruktion den Kurvenpunkten Paare reeller Zahlen bzw. Längen zuordnet. Die Kurve definiert auf diese Weise Beziehungen zwischen diesen Größen. Denkt man sich die Ebene, in der die Kurve C liegt, mit einem Koordinatensystem versehen, so existiert eine Abbildung

$$\varphi : C \rightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R}: c \mapsto (x, y),$$

die jedem Kurvenpunkt c sein zugehöriges Koordinatenpaar / Größenpaar zuordnet. Die beiden Projektionen der Abbildung sind Beispiele für Größenfunktionen. Damit lässt sich die Vorgehensweise Bernoullis wie folgt formulieren:

(1) Es gibt eine Abbildung d , die jeder Größenfunktion γ eine Funktion $d\gamma$ zuordnet (das *Differential* der Funktion γ). $d\gamma$ ist wiederum eine Größenfunktion. Man erhält $d\gamma$ mit Hilfe der Summen-, Produkt- und Konstantenregel (und daraus ableitbarer Regeln, etwa der Quotientenregel). Das *Integral* einer Größenfunktion γ ist eine Größenfunktion $\eta + c$ (c eine Konstante), deren Differential $d\eta$ die Größenfunktion γ ist: $d\eta = \gamma$.

(2) Besitzt eine Kurve an einer Stelle mit den Koordinaten x, y eine Tangente, und sind der Tangentenabschnitt t und die Subtangente s wohldefiniert (d. h. verläuft die Tangente nicht parallel zu einer Achse), so kann man die Tangente über die Subtangente mit Hilfe der Verhältnisgleichung $dy : dx : df = y : s : t$ konstruieren.

(3) Den Flächeninhalt zwischen einer im 1. Quadranten eines kartesischen Koordinatensystems gegebenen Kurve, die von Parallelen zur y -Achse in höchstens einem Punkt geschnitten wird, und der x -Achse in einem Intervall $[a, b]$ berechnet man wie folgt: Zunächst bildet man das Integral von $y dx$. In diesen Ausdruck setzt man die Koordinaten für die Kurvenpunkte an den Stellen b und a ein und subtrahiert diese voneinander.

4 Rekonstruktion

Im Folgenden geben wir ein Modell des Leibnizschen calculus innerhalb der analytischen Geometrie an, mit dessen Hilfe wir zeigen, dass die Leibniz-

sche Theorie konsistent ist und Differentiale widerspruchsfrei verwendet werden.

Gegeben sei eine der von Bernoulli betrachteten Kurven C . Es bezeichne

$$\varphi : C \rightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R}: c \mapsto (x, y),$$

diejenige Abbildung, die jedem Kurvenpunkt c von C das Paar von reellen Zahlen zuordnet, dessen erste Komponente die (Länge der) Abszisse und dessen zweite Komponente die (Länge der) Ordinate des Punktes c ist, die sog. *Koordinatisierungsfunktion*. Sie stellt die Kurve C als Kurve im \mathbf{R}^2 dar. Bei den von Bernoulli betrachteten Kurven ist $\varphi(C)$ im Sinne der heutigen Differentialgeometrie ein beliebig oft differenzierbarer Kurvenbogen.

Um den formalen Aufwand der folgenden Ausführungen möglichst gering zu halten, denken wir uns die von Bernoulli untersuchten Kurven direkt in der analytischen Geometrie gegeben. Eine Kurve C sei also über eine Parameterdarstellung

$$\phi : C \rightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R}: t \mapsto (x(t), y(t)),$$

– I ein abgeschlossenes Intervall reeller Zahlen – als Punktmenge im \mathbf{R}^2 definiert. Die Parameterdarstellung von C berücksichtigt, dass die Projektionen der Koordinatisierungsfunktion lediglich von $\phi(C)$, nicht aber voneinander abhängig sind. Wir setzen voraus, dass C eine glatte Kurve ist, d. h. dass $x(t)$ und $y(t)$ stetig differenzierbar sind und ihre Ableitungen nicht gleichzeitig verschwinden.

Durch C definierte Größenfunktionen denken wir uns als Abbildungen $\gamma: I \rightarrow \mathbf{R}$ gegeben. (Größenfunktionen, so haben wir oben gesagt, sind Abbildungen von C nach \mathbf{R} . Wir wählen hier aus rein technischen Gründen als Definitionsbereich das Parameterintervall I . Mit Hilfe von ϕ^{-1} kann man sie in Abbildungen von C nach \mathbf{R} überführen. Dies würde den formalen Aufwand erhöhen, ohne weitere inhaltliche Einsichten zu vermitteln.) Größenfunktionen sollen fast überall (d. h. bis auf endlich viele Stellen) beliebig oft differenzierbar sein, wie dies bei den von Bernoulli betrachteten Funktionen der Fall ist.

In diesem „analytischen Modell“ definieren wir das Differential $d\gamma$ einer Größenfunktion als Ableitung von γ nach dem Kurvenparameter t : $d\gamma = D_t \gamma$. (Die Ableitung von γ nach t bezeichnen wir mit $D_t \gamma$ und nicht mit $d\gamma/dt$, um die Schreibweise dx , dt , ... den Leibnizschen Differentialen vorzubehalten. Entsprechend bezeichnen wir eine etwaige Ableitung von γ nach einer Variablen x mit $D_x \gamma$.) Aufgrund der Voraussetzungen existiert dann zu jeder Größenfunktion γ das Differential $d\gamma$. Differentiale sind dann ebenfalls Größenfunktionen, d. h. fast überall beliebig oft differenzierbare Funktionen von I nach \mathbf{R} .

Um ein einfaches Beispiel zu nennen: Ein Bogen der Parabel $ax = y^2$ (Bernoulli 1924, Aufgabe 1) oder in der heute üblichen Form $y = ax^2$ lässt sich parametrisieren durch

$$\phi: [-k, k] \rightarrow \mathbf{R}^2 : t \rightarrow (x(t) = t, y(t) = a t^2) \quad (\text{mit } k \in \mathbf{R}^+).$$

Dann gelten $dx = D_t x(t) = 1$ und $dy = D_t y(t) = 2at$.

Das Differential einer Größenfunktion $\gamma: I \rightarrow \mathbf{R}$ ist $d\gamma = D_t \gamma$. Daher ist $y dx = y(t) D_t x(t)$ und das Integral von $y dx$ – nach Definition – eine Größenfunktion $\eta: I \rightarrow \mathbf{R}$, deren Differential $d\eta$ gerade $y(t) D_t x(t)$ ist. Dies ist in heutiger Notation das unbestimmte Integral $\int y(t) D_t x(t) dt$. (Bernoulli verwendet noch nicht das schon 1675 von Leibniz eingeführte Integrationszeichen, sondern spricht stattdessen vom „Integral von ...“. Wenn wir im Folgenden das Integrationszeichen verwenden, so ist damit stets ein Integral im heutigen Sinne gemeint.)

Ist $I = [a, b]$ das Parameterintervall, so kann man das bestimmte Integral

$$\int_a^b y(t) D_t x(t) dt$$

als ein Kurvenintegral auffassen:

$${}^c \int f(x, y) dx,$$

wobei $C = \phi(I)$ die gegebene Kurve ist und $f: C \rightarrow \mathbf{R}: (x(t), y(t)), t \mapsto y(t)$,

$$\text{d. h. } {}^c \int f(x, y) dx = {}^c \int y dx.$$

Ist C eine glatte Kurve, die als Graph einer Funktion in einem rechtwinkligen x, y -Koordinatensystems aufgefasst werden kann, so ist

$${}^c \int y dx \text{ gleich dem Riemann-Integral } \int_{x(a)}^{x(b)} y(x) dx, \text{ wobei } x(a) \text{ und } x(b) \text{ die}$$

x -Koordinaten des Anfangs- und Endpunktes der gegebenen Kurve sind. (vgl. etwa Courant 1972, S. 231 ff.).

Wir zeigen nun, dass man die Leibnizsche Theorie in diesem Modell rechtfertigen und erklären kann. Der Ausgangspunkt der Theorie ist eine Kurve, die über ihre Konstruktion den Kurvenpunkten Größenfunktionen, insbesondere x , y , f , s und t zuordnet. Dies haben wir wie oben angegeben modelliert. Wir zeigen nun, dass die im letzten Abschnitt 1 formulierten drei Punkte, die die Leibnizsche Theorie charakterisieren, zu beweisbaren Sätzen werden. Dies zeigt die *Korrektheit* der Theorie und erlaubt darüber hinaus eine Diskussion ihrer Reichweite, ihres *Anwendungsbereiches*.

(1) *Satz*: Es gibt eine Abbildung d , die jeder Größenfunktion γ ihr Differential $d\gamma$ zuordnet. Dabei genügt d der Summen-, Produkt- und Konstantenregel.

Beweis: Die Regeln stellen bekannte Ableitungsregeln dar.

(2) *Satz:* Besitzt eine Kurve im Punkt $(x(t), y(t))$ eine Tangente, und sind der Tangentenabschnitt t und die Subtangente s wohldefiniert (d. h. verläuft die Tangente nicht parallel zu einer Achse), so gilt die Verhältnissgleichung $dy : dx : df = y : s : t$.

Beweis: Die Steigung der Tangente im Punkt $(x(t), y(t))$ der Kurve C ist einerseits (nach Definition der Steigung) $y'(t) / s(t)$, andererseits (nach einer bekannten Formel der Analysis) gleich $D_t y / D_t x$, da $D_t x \neq 0$. Wegen $D_t y / D_t x = dy / dx$ folgt $dy : dx = y : s$. Zwischen Bogenlänge f und x und y besteht die Beziehung $(D_t f)^2 = (D_t x)^2 + (D_t y)^2$, aus ihr erhält man $f_a^b = \int_a^b \sqrt{(D_t x)^2 + (D_t y)^2} dt$ für die Länge f_a^b des Bogens zwischen den Punkten $\phi(a)$ und $\phi(b)$, woraus sich mit Hilfe von $dy : dx = y : s$ die Beziehung $dy : dx : df = y : s : t$ ergibt.

(3) *Satz:* C sei eine glatte Kurve, die als Graph einer Funktion in einem kartesischen Koordinatensystem so beschreibbar ist, dass sie im 1. Quadranten verläuft. Dann kann man den Inhalt der durch die Kurve C , die x -Achse und die Geraden $x = a$ und $x = b$ (mit $a < b$) begrenzten Fläche wie folgt berechnen: Zunächst bildet man das Integral von $y dx$. In diesen Ausdruck setzt man die Koordinaten für die Kurvenpunkte an den Stellen a und b ein und subtrahiert diese voneinander.

Beweis: Da die Kurve C der Graph einer Funktion $y = y(x)$ ist, ist das Integral von $y dx$ – wie oben schon angemerkt wurde – das (unbestimmte) Riemann-Integral $\int y(x) dx$. Setzt man in diesen Ausdruck – wie in dem Satz angegeben – die Abszissen a und b der Endpunkte von C ein, so bildet man das Riemannintegral $\int_a^b y(x) dx$, dessen Wert bekanntlich der angegebene Flächeninhalt ist.

Damit haben wir die Konsistenz der Leibnizschen Theorie nachgewiesen und auch ihre Reichweite, ihren Anwendungsbereich skizziert.

5 Diskussion der mit dem Differentialbegriff verbundenen Probleme

Vor dem Hintergrund des analytischen Modells diskutieren wir nun die in Abschnitt 2 angesprochenen Probleme.

zu (1): Im Leibnizschen calculus werden keine Grenzwerte betrachtet.

Die Gleichung $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ tritt nicht auf. Sie vermengt zwei verschiedene

ne Zugänge zur Differentialrechnung, den Leibnizschen, auf den sich die rechte Seite der Gleichung bezieht, und den Cauchyschen, auf den die linke Seite der Gleichung referiert. Die mit der Gleichung verbundenen Interpretationsprobleme haben ihren Ursprung in der Geschichte der Mathematik, in zwei verschiedenen Ansätzen zur Analysis.

zu (2): Die Kettenregel lautet im Leibnizschen calculus: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$.

Sie besitzt eine wohldefinierte Bedeutung, gleich bezeichnete Differentiale besitzen dieselbe Bedeutung. Dies sei im oben betrachteten Beispiel an der Kurve erläutert, deren Abszisse und Ordinate in der Beziehung $y = \sin^2(x)$ mit $u(x) = \sin(x)$ stehen. Als Parameterdarstellung wählen wir (in einem geeignet gewählten Parameterintervall, etwa $(0, \pi/2)$)

$x(t) = t$ und $u(t) = \sin(t)$ und $y(u) = u^2$, also $y(t) = \sin^2(t)$.

Im analytischen Modell ist

$dx = D_t x(t) = 1$ und $dy = D_t y(t) = 2 \sin(t) \cos(t)$ und $du = D_t u(t) = \cos(t)$.

Die Kettenregel besagt nun: $\frac{2 \sin(t) \cos(t)}{1} = \frac{2 \sin(t) \cos(t)}{\cos(t)} \frac{\cos(t)}{1}$, was

eine korrekte Aussage ist. Es sei angemerkt, dass die Kettenregel im analytischen Modell wie angegeben durch das Rechnen mit Differentialen bewiesen werden kann.

Die Regel zur *Differentiation der Umkehrfunktion* lautet im Leibniz-

schen calculus: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$. Auch sie besitzt eine wohldefinierte Bedeu-

tung, die wir wieder am oben diskutierten Beispiel der Kurve darstellen, deren Abszisse und Ordinate in der Beziehung $y = x^2$ stehen. Wir wählen die Parameterdarstellung (im Parameterintervall $(0, 1)$) $x(t) = t$ und $y(t) = t^2$.

Dann ist $dx = D_t x(t) = 1$ und $dy = D_t y(t) = 2t$. Hieraus folgt $\frac{dy}{dx} = \frac{2t}{1} = 2t =$

$2x$ und $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2t} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2y^{1/2}}$.

zu (3): Die Schreibweise $\int f(x) dx$ hat, wie schon oben angemerkt wurde, einen wohlbestimmten Sinn. Integration bedeutet für Leibniz Antidifferentiation. Das Integral von $f(x) dx$ ist diejenige Größenfunktion, deren Differential das Produkt $f(x) dx$ ergibt. dx ist keine unabhängige Variable sondern wie $f(x)$ eine Größenfunktion.

zu (4): Aufgrund der Definition der Integration als Antidifferentiation hat das Differential „ dx “ in der Differentialrechnung dieselbe Bedeutung wie in der Integralrechnung.

zu (5): Die Substitutionsregel $\int f(x)dx = \int f(x(u)) \frac{dx}{du} du$ besitzt – analog zur Kettenregel – eine klare Bedeutung. Sie lässt sich genauso wie die Kürzungsregel im analytischen Modell des Leibnizschen calculus durch Rechnen mit Differentialen beweisen.

Entsprechendes gilt für die Methode der Trennung der Variablen zum Lösen von Differentialgleichungen erster Ordnung. Im Leibnizschen calculus stellt diese Methode nicht nur ein „formales Rezept“ dar, sondern alle Schritte haben eine wohldefinierte Bedeutung (vgl. Burscheid / Struve 2002).

zu (6): Für Leibniz ist eine Kurve C Ausgangspunkt des calculus. Den Punkten von C ordnet er die Länge der Abszissen und die Länge der Ordinaten zu. Daher spielen für Leibniz x und y eine symmetrische Rolle. Die moderne Analysis hat diese Symmetrie verloren, weil ihr Untersuchungsgegenstand nicht Kurven sondern Funktionen sind. Funktionen haben unabhängige und abhängige Variable, die dann nicht mehr symmetrisch behandelt werden können. Der Verlust der Symmetrie geht also auf eine Verschiebung der Objekte der Analysis zurück: von Kurven zu Funktionen – eine Entwicklung, die wesentlich von Euler angestoßen wurde.

Zusammenfassend kann man sagen, dass die eingangs beschriebenen Verständnisprobleme der Analysis historisch erklärbar sind: Sie haben ihren Ursprung darin, dass die Schreibweisen und Symbole (Differentialie) auf den Leibnizschen calculus zurückgehen, die Interpretation dieser Symbole sich aber im Laufe der Zeit gewandelt hat.

Literatur

- Allendoerfer, C. B. (1952). *American Mathematical Monthly*, Vol. 59.
- Apostol, T. M. et al. (Hrsg.) (1969). *Selectes Papers on Calculus*, *American Mathematical Monthly*.
- Bernoulli, J. (1914). *Die erste Integralrechnung*. Übersetzt von G. Kowalewski, Leipzig.
- Bernoulli, J. (1924). *Die Differentialrechnung*. Übersetzt von P. Schafheitlin, Leipzig.
- Bos, H. J. M. (1974/75). Differentials, Higher Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus. *Archive for the History of Exact Sciences* 11, 1–90.
- Bos, H. J. M. (1981). On the Representation of Curves in Descartes' Géométrie. In: *Archive for the History of Exact Sciences* 24, 295 – 338.
- Burscheid, H. J. / Struve, H (2001): Die Differentialrechnung nach Leibniz – eine Rekonstruktion. *Studia Leibnitiana*, Band XXXIII/2, 163–193.
- Burscheid, H. J. / Struve, H. (2002): Die Integralrechnung von Leibniz – eine Rekonstruktion. *Studia Leibnitiana*, Band XXXIV/2, 127–160.
- Church, A. (1942). Differentials, *American Mathematical Monthly*, Vol. 49, 389–392.
- Courant, R. (1971⁴ und 1972⁵). *Differential- und Integralrechnung*, Bd. 1 und Bd. 2. Berlin.
- Descartes, R. (1637). *La Géométrie*. Leiden.

- Kac, M. / Randolph, J. F. (1942). Differentials. *American Mathematical Monthly*, Vol.49, 110–112.
- Knobloch, H. W. / Kappel, F. (1974). *Gewöhnliche Differentialrechnungen*, Stuttgart.
- Taylor, A. E. (1974): The Differential: Nineteenth and Twentieth Century Developments. *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 12.
- Walter, W. (1992³): *Analysis I*. Berlin.

Charlotte und Jürgen Schönbeck
Pädagogische Hochschule Heidelberg

Der Welsche Gast – Eine didaktische Allegorie der mathematischen Wissenschaften in einer Heidelberger Handschrift aus dem 13. Jahrhundert

Summary

In the library of the University at Heidelberg there is an old manuscript from the 13th century, decorated with coloured sketches, and containing the nearly complete text of the didactic poem ‚Der Welsche Gast‘ by Thomasin of Circlaere. There you'll find a series of pictures of the so-called quadrivium – arithmetica, musica, geometria, astronomia –, which will be regarded here from an iconological point of view. In this way it will show itself as an allegory of an euclidean deductive ‚mathematica speculativa‘ and it may give a partial answer to the question about the nature of mathematics.

1 Boëthius aus Rom

Zu den spätantiken römischen Gelehrten, die sich um eine Verschmelzung griechischer und römischer Kultur bemühten und welche die Überlieferung griechischen Bildungsgutes entschieden förderten, gehört bekanntlich der Staatsmann, Philosoph und Universalgelehrte Anicius Manlius Torquatus Severinus Boëthius (480?–524). Zunächst Kanzler im Dienste des Ostgotenkönigs Theoderichs des Großen (um 453–526), wurde er ohne Prozess wegen angeblichen Hochverrats im Jahre 524 auf Befehl Theoderichs in Padua hingerichtet.

Boëthius war vielleicht der einflussreichste Vermittler zwischen Altertum und Mittelalter, der letzte Römer und der erste Scholastiker, als Logiker nicht ohne Wirkung, als Mathematiker ein Laie. Sein Gesamtwerk wurde dennoch Quelle der Scholastik und Grundlage mittelalterlicher Bildung und Wissenschaft: sein philosophisches Hauptwerk *De consolatione philosophiae*, seine Übersetzungen und Kommentare zahlreicher aristotelischer Schriften und seine Monographien zu den mathematischen Wissenschaften *arithmetica – musica – geometria – astrologia*. Dabei führte er im ersten Buch seiner *De institutione arithmetica libri II* für diese vier propädeutischen Wege zur Philosophie den Namen *quadrivium*, zunächst *quadrivium*, ein, dem dann im 9. Jahrhundert der Name *trivium* für die drei sprachlichen

Fächer *grammatica – rhetorica – dialectica* zur Seite gestellt wurde. Von jenen mathematischen Schriften, aus denen mittelalterliche Gelehrte ihre mathematischen Kenntnisse bezogen, sind allein zwei Bücher zur Arithmetik, fünf Bücher zur Musik und Fragmente zur Geometrie erhalten. Spuren der Werke des Boëthius finden wir aber auch, noch Jahrhunderte später, in der für ein breiteres Publikum bestimmten Literatur. Dazu gehören sowohl die überwiegend althochdeutschen, kommentierenden Prosaübersetzungen durch den fröhscholastischen Theologen Notker III (um 959–1022) in St. Gallen – als auch das seinerzeit weit bekannte mittelhochdeutsche, illustrierte didaktische Lehrgedicht *Der Welsche Gast* des Thomasin von Circlaere (um 1186–nach 1215/16) aus dem frühen 13. Jahrhundert.

2 Thomasin von Circlaere

Bereits der Titel *Der Welsche Gast* (*Der Welhische Gast*, *Der Wälsche Gast*) dieser Schrift verrät die Herkunft ihres Autors. Denn das ursprünglich aus dem Germanischen stammende mittelhochdeutsche Wort *welsch*, mit dem zunächst die keltischen Bewohner westeuropäischer Länder bezeichnet wurden, weist schon bald, allgemeiner und umfassender, auf fremde, andersartige Herkunft hin, dann auch auf unverständliche, fremdartige Redeweisen. Ein welscher Gast ist also ein Gast aus der Fremde, wobei das Wort Gast selbst schon den Fremdling bezeichnet. Nicht selten wird dabei die Verwendung von *welsch* geographisch eingeschränkt, auf romanische Sprachen oder auf den italienischen Raum – und *der welhisch gast* (Vers 14.681 bei Thomasin) wird zum *Fremdling aus Italien*, jenem Land, in dem der Autor geboren wurde.

Aus dessen Leben allerdings ist nur Weniges bekannt. Ein Bildnis von ihm ist nach unserem Wissen nicht überliefert. Sehr wahrscheinlich gehörte er dem italienischen Adelsgeschlecht Cerchiari (Cerclaria, Circlaere, auch Zirklaere) in Cividale an: „ich heiz Thomasîn von Zerclaere“ (v. 75). Geboren um das Jahr 1186 in der lombardischen Markgrafschaft Friaul (Friûle), erhielt er vermutlich eine theologische Ausbildung und wirkte dann am Hof von Wolfger von Erla (1140–1218), seit 1204 Patriarch von Aquileja, zuvor Bischof von Passau, ein Förderer auch des Minnesängers Walther von der Vogelweide (um 1170–1230). Nur zwei Werke von Thomasin sind bekannt: sein um 1203 entstandenes, nicht erhaltenes Frühwerk *Buoch von der Hüfscheit*, eine in provenzialischer Sprache verfasste höfische Sittenlehre – und sein mittelhochdeutsches, also in für ihn fremder Sprache geschriebenes Hauptwerk *Der Welsche Gast*, ein moralphilosophisches Epos über die höfischen Tugenden. Die Entstehung dieses Werks ist genau datiert: „zweir min drizec jâr“ nach dem Verlust des Heiligen Grabes (v. 11.717) an Saladin (1137/38–1193), Sultan von Ägypten und Syrien, der im Dezember 1187 Jerusalem erobert hatte. Mit dieser Angabe erhalten wir einen vagen, wenig

präzisen Hinweis auf das Lebensende von Thomasin: er starb nicht vor 1215/16, und vermutlich in Aquileja.

3 Der Welsche Gast

Der Welsche Gast, von Thomasin von Circlaere in nur zehn Monaten verfasst, ist ein in Volkssprache gehaltenes Lehrgedicht des frühen 13. Jahrhunderts: mit fast 15.000 paarig gereimten Versen, verteilt auf zehn Bände. Es ist in mehr als zwanzig Handschriften überliefert, von denen mehr als die Hälfte durch kolorierte Federzeichnungen geschmückt sind; neun von ihnen enthalten einen Bilderzyklus auch zu den Fächern des *trivium* und des *quadrivium*, und von ihnen wiederum werden drei in Heidelberg bewahrt. Als vermutlich älteste von allen, die vielleicht sämtlich auf eine gemeinsame, uns unbekannte Quelle zurückgehen, gilt die auf Pergament geschriebene Handschrift A der Heidelberger Universitätsbibliothek (*Codex Palatinus Germanicus* 389), entstanden um 1256, vor gut 750 Jahren. Die jüngste der uns bekannten Handschriften vom *Welschen Gast* ist rund fünfhundert Jahre alt. – Den abgebildeten mathematischen Teil eines siebenteiligen Bilderzyklus dieser Handschrift Cpg. 389 werden wir im folgenden einer ikonographischen Betrachtung zugrunde legen (Abb.1).¹

Die didaktische Zielsetzung des Buches ist unübersehbar. Nicht zum Zweck der Unterhaltung ist dieses Werk geschrieben, sondern „durch nôt“. Dabei wendet sich der Autor an alle Mitglieder der Ritterschaft, an Damen und Herren bei Hofe, Gebildete und Halbgebildete: an „vrume rîtr“, „guote vrouwen“, „wîse phaffen“ (v. 14.695/96), an eine Leserschaft mit sehr unterschiedlichen Kenntnissen und verschiedenem Vorwissen. Insbesondere für die höfische Jugend und für jugendliche Adelige beschreibt er allgemeine Tugend- und Verhaltensregeln, die zu einem moralisch und ethisch vorbildlichem Leben hinführen sollen, wie es berühmte, aus der Literatur bekannte Personen vorgelebt haben. Dies alles geschieht vor dem Hintergrund einer allgemeinen christlichen Sittenlehre, in deren Mittelpunkt die drei göttlichen Tugenden und die vier Kardinaltugenden stehen: Glaube („Geloube“, v. 7.479), Hoffnung („Geding“, v. 7.483) und Liebe („Diumuot“, v. 7.498), Klugheit („Sin“, v. 7.470), Gerechtigkeit („Reht“, v. 7.473), Mäßigkeit („Staetekeit“, v. 7.495) und Tapferkeit („Vrümkeit“, v. 7.487). Irdische Gottgefälligkeit und christliche Gelehrsamkeit bilden demnach – so Thomasin – ein Ziel jeder Erziehung. Nicht weniger wichtig aber ist ihm der Weg dorthin, der über die Vernunft, die Bildung und die Wissenschaften führt, die deshalb als Ganzes und jede für sich und im Einzelnen vorgestellt werden (Buch VII). – Wenn Thomasin hier ‚Wissenschaft‘ mit den *septem artes liberales* (*trivium* und *quadrivium*) identifiziert, zeigt er sich als später Nachfolger des Boëthius, sieben Jahrhunderte nach dessen Tod; woher er selbst entsprechende Kenntnisse besaß und welche Quellen er benutzen konnte, ist uns letztlich nicht bekannt.

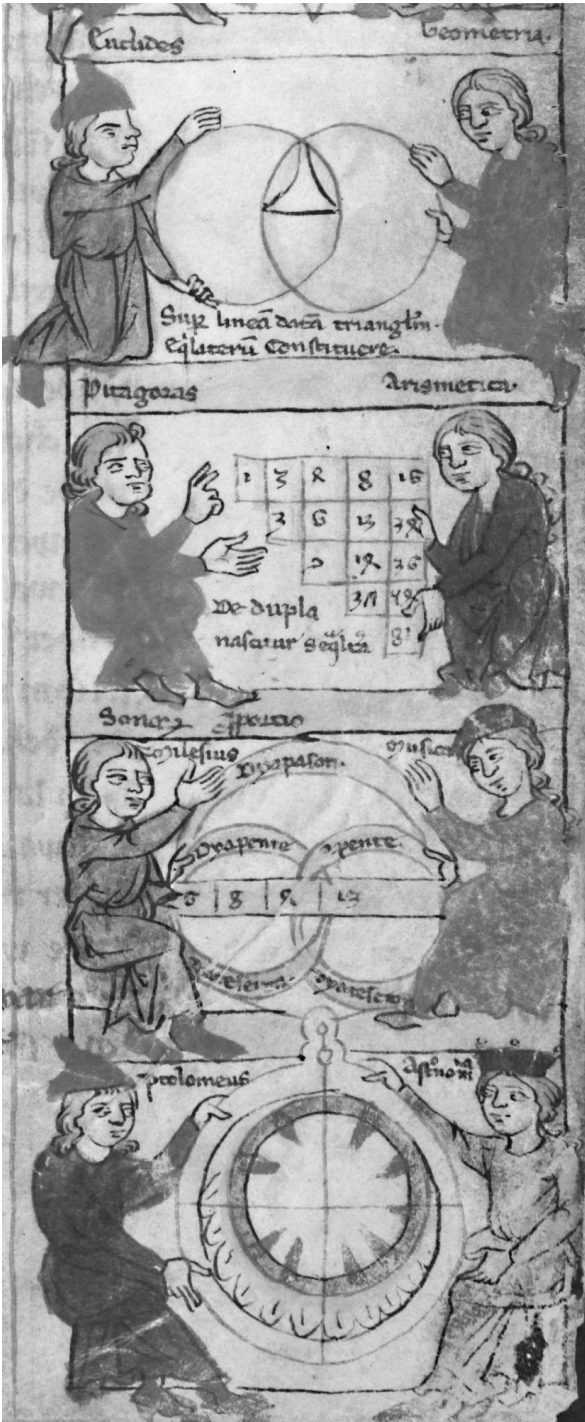


Abb. 1: Der Welsche Gast: quadrivium
 Universitätsbibliothek Heidelberg
 Cpg. 389, fol. 139^r (vgl. Farbbild 26)

4 Die Handschrift Cpg. 389

In der textlichen und später bildlichen Überlieferung dieser sieben freien Künste, wie sie allegorisch, aber noch ohne Bildmaterial, zuerst im enzyklopädischen neunbändigen Handbuch *De nuptiis philologiae et mercurii* von Martianus Capella (vor 439–2. Hälfte des 5. Jahrhunderts) auftraten, hatte sich eine kanonische Reihenfolge nicht herausgebildet. Allerdings wurden häufig die Fächer des *trivium* vor jenen des *quadrivium* genannt; in den mittelalterlichen Artistenfakultäten bestimmten sie in der Regel die Unterstufe des Lehrplans. Dabei rangierte zumeist die *grammatica* als erste, grundlegende dieser Wissenschaften am Anfang, galt die *dialectica* – eine „Kunst der Erfindung, [die] den Weg zu den Prinzipien aller Wissenschaften“ beherrscht² – nicht selten als deren höchste. In der ältesten uns bekannten bildlichen Allegorie der mathematischen Wissenschaften, in einer aus dem 9. Jahrhundert stammenden Bamberger Boëthius-Handschrift, stehen, in der Abbildung links beginnend, *musica* (mit einem Musikinstrument), *arithmetica* (mit einer Rechenschnur), *geometria* (mit einer Meßlatte) und *astrologia* (mit leuchtenden Fackeln) gleichberechtigt nebeneinander (Abb. 2).³



Abb. 2: Boëthius: quadrivium
Staatsbibliothek Bamberg
Msc. Class. 5, fol. 9^v (vgl. Farbbild 30)

Für diese von uns betrachteten mathematischen Fächer des *quadrivium* hatte schon Aristoteles eine systematische Einteilung vorgeschlagen, die sich auf verschiedene Arten der *multitudo* (trennbare Menge) und der *magnitudo* (zusammenhängende Menge) bezieht.⁴ Wir finden sie wieder in der Klassifizierung durch den Neupythagoreer Nikomachos von Gerasa (um 100 n. Chr.), nach dem Arithmetik (Rechenkunst) und Musik (Tonkunst) von den *diskreten* Mengen bzw. von ihren Verhältnissen handeln, Geometrie (Messkunde) und Astronomie (Sternkunde) von den unbewegten bzw. den bewegten *stetigen* Größen. Diese fast hierarchische Gliederung wird von Boëthius übernommen, inhaltlich auch von Thomasin, der aber bei der Beschreibung der Lehrinhalte des *quadrivium* ohne Begründung eine leicht veränderte Reihenfolge wählt (v. 8.926–8.932):

*"Arismetica diu gît ze lône
daz man von ir kunst zelen sol;
Gêometrie lêrt mezzen wol;
Musicâ mit wise schoene
gît uns wîstuom an die doene;
Astronomie lêrt âne wanc
der sterne natûre und ir ganc."*

Sie scheint ihm nicht besonders wichtig zu sein, wie die wieder andere Anordnung im Bilderzyklus dieser mathematischen Fächer beweist: am Anfang die Geometrie, es folgen Arithmetik und Musik, und als letzte die Astronomie.

4.1 Geometrie

Das erste der vier Bilder des *quadrivium* im *Welschen Gast* zeigt, anders als das Bild in der Bamberger Handschrift, zwei einander gegenüberstehende Personen, zwischen ihnen eine Zeichnung und ein kurzer Text. Der Nichtmathematiker, an den Thomasin sich doch auch wendet, dürfte Schwierigkeiten haben, dieses Bild zu deuten. Und das, obwohl die einzelnen Bildteile direkt auf einen geometrischen Hintergrund verweisen: die am rechten Bildrand als *geometria* persönlich vorgestellte weibliche Gestalt, der namentlich genannte Geometer Euklid, zwei einander schneidende Kreise mit einer krummlinig begrenzten, dreiseitigen Figur und ein lateinischer Satz: *super lineam datam triangulum equilaterum constituere*. Aber auch heute noch wird nicht einmal jeder Mathematiker wissen, daß dieser Text wörtlich aus den euklidischen *Elementen* übernommen ist und nichts anderes verlangt als die allererste dort geforderte geometrische Konstruktion (deutsche Euklid-Zitate nach Thaer (1975)):

El.I.1. Über einer gegebenen Strecke ein gleichseitiges Dreieck zu errichten,

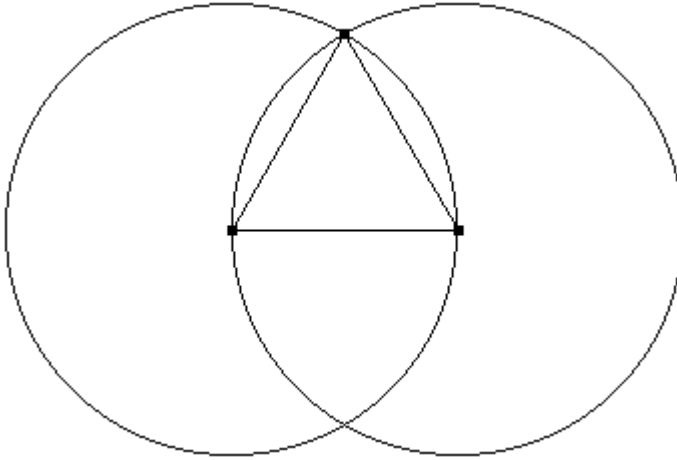


Abb. 3: Dreieckskonstruktion
Euklid: Elemente I.1

und daß die von Thomasin wiedergegebene geometrische Zeichnung die Lösung dieser Aufgabe oder einen Schritt auf dem Weg zu einer Lösung darstellen soll. (Offenbar hat Thomasin das euklidische Werk in irgendeiner Form schon gekannt, vielleicht auf dem Wege über Boëthius.) Die aus der Schulgeometrie allgemein bekannte euklidische Konstruktion (Abb.3) benutzt wesentlich die am Anfang der *Elemente* postulierte Möglichkeit und Eindeutigkeit des Konstruierens von Strecken und von Kreisen (El.I.Post.1, Post.3) sowie das erste euklidische, aber wohl schon ältere Axiom von der Drittengleichheit der Gleichheitsrelation:

El.I.Ax.1. Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich;

außerdem wird, wie auch von Euklid, die Existenz eines Schnittpunktes zweier hier benötigter Hilfskreise auf Grund nicht formulierter Stetigkeitsbetrachtungen stillschweigend (oder wahrscheinlicher wohl: unbemerkt) vorausgesetzt. Im deduktiven Aufbau der Geometrie ist El.I.1 schon Grundlage der unmittelbar folgenden ersten Konstruktionsaufgaben El.I.2u.3 (Abtragen von Strecken) und – von dem bewegungsgeometrisch bewiesenen Kongruenzsatz El.I.4 abgesehen – Grundlage auch der ersten beiden theoretischen Lehrsätze El.I.5u.6 (Basiswinkelsatz von Thales).

Die Zeichnung zu El.I.1 im *Welschen Gast* kann allerdings nicht als Ergebnis einer sorgfältigen Konstruktion, sondern höchstens als vorläufige Skizze angesehen werden. Doch auch dann ist das zu konstruierende gleichseitige Dreieck noch nicht zu erkennen und damit die Aufgabe nicht wirklich gelöst: die Endpunkte der gegebenen Strecke, von der die Konstruktion zu allererst ausgehen muß, müssen die Mittelpunkte der beiden Hilfskreise werden; diese Kreise sind in der Zeichnung ‚nur ungefähr kongruent‘; und die beiden gesuchten Dreiecksseiten sind, völlig unmotiviert, als Kreisbögen,

nicht als geradlinige Strecken skizziert – was nicht nur auf zeichnerische Ungeschicklichkeit, sondern auch auf mathematische Unkenntnis hinweist. Das Bild kann dennoch, trotz aller Unzulänglichkeit, den Blick öffnen für ein über das unmittelbar Sichtbare hinausgehende Verständnis des Abgebildeten. Es wird dadurch, in seiner Gesamtheit, zu einer allegorischen Darstellung der Geometrie, in der eine Personifikation (hier: die *geometria*) in Verbindung mit einer oder mehreren anderen Personen (hier: Euklid) oder Figuren (hier: die Zeichnungen) zusammen in eine Handlung (hier: die Dreieckskonstruktion) einbezogen sind. Diese Zusammenstellung im *Welschen Gast* ist kaum zufällig, vielmehr didaktisch begründet. Offenbar soll das Bild der Geometrie im *Welschen Gast* mit ihrem Repräsentanten Euklid und durch den beigefügten Bezug auf den ‚Anfang‘ mit El.I.1 dem mittelalterlichen Leser eine ganz bestimmte Vorstellung vermitteln: Geometrie nicht als eine anschauliche und hübsche Figurenlehre, sondern als synthetisch-deduktive und, so später Immanuel Kant (1724-1804), eine von Erfahrungen und Sinneswahrnehmungen freie Disziplin – als eine *geometria speculativa*, wie sie in der Antike von Euklid kanonisiert und dann von Boëthius überliefert wurde.

4.2 Arithmetik

Als in der Ausführung genauso unzureichend erweist sich das zweite Bild: eine weibliche *arismetica* – weiblich, wie schon die *geometria*, weil im Lateinischen die meisten Bezeichnungen von Abstrakta weibliche Endungsformen besitzen –, ihr gegenüber der Mathematiker Pythagoras, zwischen ihnen eine anachronistisch, weil mit indisch-arabischen Ziffern geschriebene treppenförmige Zahlentafel und die lateinische Erklärung *de dupla nascitur sesquialtera* (richtig: *duplo*). Dabei sind in der Tafel (Abb.4) einige der dem Schreiber oder Zeichner wohl noch ungewohnten Ziffern nur bei gutem Willen als gleich bzw. als verschieden anzuerkennen. Schwerer wiegen, da man wegen *duplum* und *sesquialter* in der Beischrift eine multiplikative Struktur des Diagramms vermuten muß, die offensichtlichen Fehler, die auch hier auf Flüchtigkeit oder fehlendes Verständnis schließen lassen. Nur in der entsprechend berichtigten Form (mit 18 statt 14 und 27 statt 37) wird dann

| | | | | |
|---|---|---|----|----|
| 1 | 2 | 4 | 8 | 16 |
| | 3 | 6 | 12 | 24 |
| | | 9 | 18 | 36 |
| | | | 27 | 54 |
| | | | | 81 |

Abb. 4: Thomasin: Zahlentafel
 Universitätsbibliothek Heidelberg
 Cpg. 389, fol. 139^r

das dreifach-multiplikative Prinzip deutlich, nach dem das Zahlenschema durchgängig aufgebaut ist: Es ordnet sich ein in die Proportionenlehre des Boëthius, die schon in der Bamberger Boëthius-Handschrift eine etwas irreführende oder mißglückte (später in dieser Art auch von Thomasin übernommene) ikonische Darstellung findet (Abb. 5):

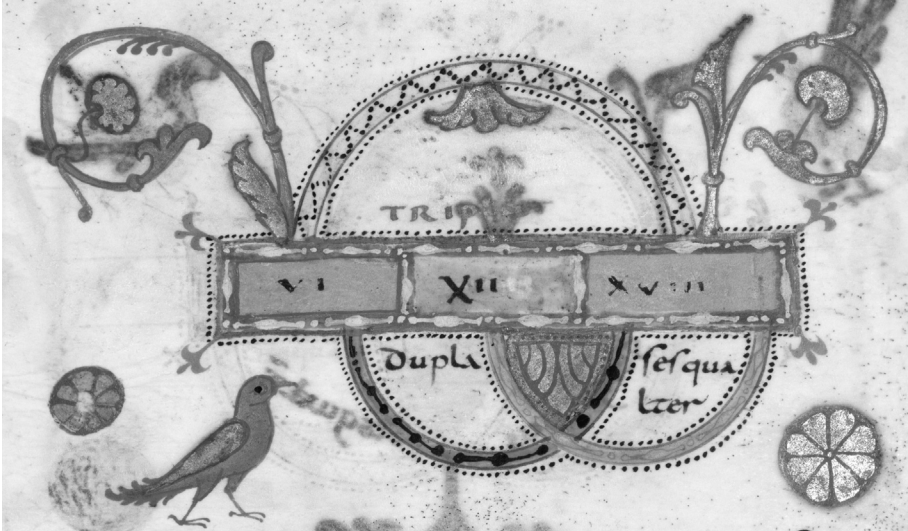


Abb. 5: Boëthius: Zahlenbild
Staatsbibliothek Bamberg
Msc. Class. 5, fol. 73^v (vgl. Farbbild 29)

Seine theoretische Grundlage aber hat es bereits in der euklidisch-pythagoreischen Teilbarkeitslehre, die bei Euklid im ersten arithmetischen Buch VII der *Elemente* zu dem theoretischen Lehrsatz

El.VII.18. Wenn irgendwelche Zahlen entstehen, indem zwei Zahlen eine Zahl vervielfältigen, dann müssen die Ergebnisse dasselbe Verhältnis haben, wie die vervielfältigenden Zahlen

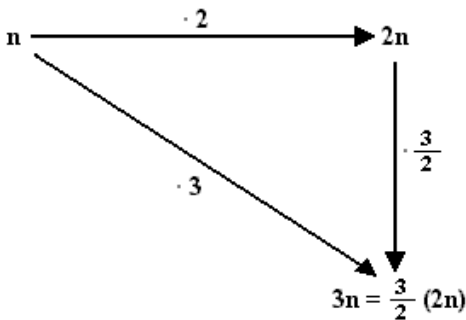


Abb. 6: Euklid: Zahlendiagramm
Elemente VII.18

führt (Abb.6). Auf der Grundlage der euklidischen Definition von 'in Proportion stehen' bei (natürlichen) Zahlen (El.VII.Def.20) und zusammen mit El.VII.17 liefert dies – in heutiger Terminologie – die formalen Regeln des Erweiterns und Kürzens der elementaren Bruchrechnung, den euklidischen Satz eingeschlossen, daß jeder Bruch durch Kürzen mit einer geeigneten natürlichen Zahl in seine reduzierte Form übergeht:

El.VII.20. Die kleinsten unter den Zahlen, die dasselbe Verhältnis haben wie sie, messen Zahlen, die dasselbe Verhältnis haben, gleich oft, die größere die größere und die kleinere die kleinere.

(In denselben Zusammenhang gehören die Sätze El.VII.21u.22, die schon dem Pythagoreer Archytas von Tarent (Mitte des 4. Jh. v. Chr.) bekannt waren.) Zu solchen zahlentheoretischen Sätzen über ganze Zahlen und aus ihnen bestehenden Verhältnissen wird also im *Welschen Gast* in einer 3/2-Tafel ein leicht zu verallgemeinerndes Beispiel aufgezeigt. – Offenbar enthält das vollständige Bild außer den handelnden Personen, die den historischen Zusammenhang herstellen, noch mehr als ein vielleicht interessantes Zahlenschema und mehr noch als eine nur überraschende Zahlenspielerei; bei ikonologischer Betrachtung wird es zu einer Allegorie der Arithmetik, und es kann dann deren inhaltliche Aufgabe im Sinne einer theoretischen, überwiegend nichtmystifizierten Zahlenlehre deutlich machen – wie sie von Pythagoras und seinen Schülern entwickelt wurde.

4.3 Musik

Im dritten Bild erscheinen unter dem Schriftzug *sonorum proporcio* die *musica* als Personifikation und ein Milesius als Repräsentant der Musik, als Attribute (in einem von Boëthius übernommenen Diagramm) eine mit den Zahlen 6, 8, 9, 12 (fälschlich 6, 8, 4, 12) beschriftete oder in Zahlenfelder eingeteilte Leiste und fünf (gerichtete) Operatorbögen. Sie heben einige der auf dieser Menge möglichen Zahlenpaare hervor, und sie erinnern mit den zusätzlichen lateinischen Namen an die schon in der Antike durch die Pythagoreer erfolgte Entdeckung der Rationalität der musikalischen Harmonie: Töne, die – wie etwa am Monochord oder Kanon – mit Saiten der Länge $1/2$, $2/3$, $3/4$ bezüglich einer Grundsaitenlänge 1 erzeugt werden, führen zu den als Oktave (*diapason*, ursprünglich *diploon*), Quinte (*diapente*, ursprünglich *hemiolion*) und Quarte (*diatessaron*, ursprünglich *epitriton*) benannten und in der Regel als konsonant empfundenen Intervallen der diatonischen Tonleiter. Eine Zeichnung wie jene im *Welschen Gast* kann also – bei richtiger Schreib- und Lesart – die Tonintervalle und die ihnen zugeordneten Schwingungszahlen erkennen lassen. Sie verdeutlicht dann, daß die Oktave in Quarte und Quinte oder in Quinte und Quarte zerlegt werden

kann, entsprechend der im Bild ablesbaren oder zumindest nachvollziehbaren rationalen Beziehungen

$$\frac{1}{2} = \frac{6}{12} = \frac{6}{8} \circ \frac{8}{12} = \frac{3}{4} \bullet \frac{2}{3} \text{ und } \frac{1}{2} = \frac{6}{12} = \frac{6}{9} \circ \frac{9}{12} = \frac{2}{3} \bullet \frac{3}{4},$$

sie kann, was die korrekte Zeichnung nahelegt, durch einen weiteren Operatorbogen gemäß

$$\frac{2}{3} = \frac{6}{9} = \frac{6}{8} \circ \frac{8}{9} = \frac{3}{4} \bullet \frac{8}{9}$$

das zum Ganzton (große Sekunde) zwischen Quarte und Quinte – den Paaren (3,4) und (2,3) – gehörende Zahlenpaar (8,9) aufzeigen (was Euklid in seiner Musiktheorie *Sectio canonis* bereits wußte),⁵ und schließlich sogar mit

$$\frac{1}{2} = \frac{6}{12} = \frac{6}{8} \circ \frac{8}{9} \circ \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \bullet \frac{8}{9} \bullet \frac{3}{4}$$

die Zerlegung der Oktave in zwei Tetrachorde und den Ganzton erklären. Exemplarisch und durch Wechsel zwischen den unterschiedlichen Repräsentationsebenen – jener der Operatoren und jener der Zahlenverhältnisse – läßt sich so die arithmetische Grundaufgabe der griechisch-wissenschaftlichen Musik vorführen: die Intervallanalyse des Tonsystems und die Untersuchung der Möglichkeit, Zwischentöne zu berechnen. Dabei werden elementare Regeln des heute so genannten Kürzens und Erweiterns benutzt; die Arithmetik steht im Bilderzyklus wohl doch nicht nur zufällig vor der Musik.

Diese Zeichnung ist offensichtlich ungenau, irreführend oder sogar durchgehend falsch: die Skaleneinteilung, erneut die Schreibweise der Ziffern, die vermutlich nur zufällige und bedeutungslose angenäherte Halbkreisform und die Treffpunkte (Anfangs- und Endpunkte) der Bögen, schließlich die Namengebung (die zu einer Gleichsetzung von Quinte und Quarte führen würde). Als Bild hinter dem unzureichend Abgebildeten wird für den kundigen Betrachter dennoch Musik als eine mathematische Disziplin sichtbar. Nicht sinnlich-harmonische Gefühlserfahrung und nicht wirklich hörbare Töne – wie bei dem Harmoniker Aristoxenos von Tarent (Mitte des 4. Jh. v. Chr.) – stehen im Mittelpunkt dieser antiken Musikwissenschaft, sondern – wie bei dem Kanoniker Archytas von Tarent (1. Hälfte des 4. Jh. v. Chr.) – berechenbare Zahlenverhältnisse: um „zu suchen, welches harmonische Zahlen sind und welches nicht, und weshalb beides“, und um „den Verständigen [...] intellektuelles Vergnügen durch die Nachahmung der göttlichen Harmonie“ zu gewähren.⁶

Die methodischen Anfänge einer solchen mathematischen Musiktheorie, wie sie im *Welschen Gast* ikonisch dargestellt wird, lassen sich bis zu dem Pythagoreer Philolaos von Kroton (Mitte des 5. Jh. v. Chr.) zurück verfolgen. Er schon kannte mit der Folge

$$8/9 - 8/9 - 243/256 - 8/9 - 8/9 - 8/9 - 243/256$$

die Schrittweite der Töne der pythagoreischen, diatonischen Tonleiter (denen wir heute die Frequenzverhältnisse

$$9/8 - 9/8 - 256/243 - 9/8 - 9/8 - 9/8 - 256/243$$

zuordnen und deren Produkt natürlich 2/1 ergeben muß), und er lehrte damit als Erster die Zerlegung des Tetrachords in zwei Ganztöne und einen Halbton: man erhält im Operatormodell den zunächst unbekanntem Halbtonschritt 243/256, wenn man vom Grundton um zwei Ganztonschritte aufwärts geht und dann die noch fehlende Schrittweite zur Quarte bestimmt – oder auch durch die formale, so in der Antike natürlich nicht geschriebene Zerlegung

$$\frac{3}{4} = \frac{8}{9} \circ \frac{9}{8} \circ \frac{8}{9} \circ \frac{9}{8} \circ \frac{3}{4} = \frac{8}{9} \circ \frac{8}{9} \circ \frac{9}{8} \circ \frac{9}{8} \circ \frac{3}{4} = \frac{8}{9} \bullet \frac{8}{9} \bullet \frac{243}{256}.$$

Nur wenig später als Philolaos lebte in Milet der Lyriker und Musiker Timotheos (um 450–360), den Boëthius erwähnt und mit dem vielleicht der im Bild als Milesius bezeichnete Repräsentant der Musik identifiziert werden muß – auch wenn im Text von Thomasin „Timothêus“ und „Millesjus“ als zwei verschiedene Personen genannt werden (v. 8.952).

4.4 Astronomie

Die Allegorie der Astronomie folgt schließlich im Aufbau jeder der drei voranstehenden: am rechten Bildrand eine weibliche Personifikation der *astronomia*, links als ihr Repräsentant eine weitere Figur: Ptolemaios, und in der Mitte ein von beiden gemeinsam gehaltenes Instrument (das allerdings wohl kaum jedem Betrachter sofort bekannt ist). – Gegenüber den vorherigen Bildern von Geometrie, Arithmetik und Musik fehlt in diesem Bild ein den Zusammenhang erläuternder oder eine Handlung beschreibender Text, der vielleicht die Funktion des Gerätes erklären könnte.

Ein Vergleich mit einer anderen Thomasin-Handschrift hilft hier weiter.⁷ Sie enthält an dieser Stelle die Anleitung *Accipe solis altitudinem et considera ascensum*, kann mit dieser Formulierung an eine Textstelle in einer dem Gerbert von Aurillac (um 940/950–1003) oder seiner Schule in Reims zugeschriebenen Abhandlung *De utilitatibus astrolabii* erinnern – und läßt dann in dem abgebildeten Gegenstand ein Astrolabium erkennen. Dieses alte Instrument diente, in seinen verschiedenen Varianten, zum Ver-

anschaulichen, Beobachten und Messen vom Sternenörter. Es soll schon von Ptolemaios (um 85–um 160), von Hipparchos (um 180–127 v. Chr.), von Apollonios (um 260–um 190 v. Chr.) oder von Eudoxos (um 408–um 347 v. Chr.) erfunden worden sein, und es wurde später von arabischen Gelehrten, in Indien und China und während des ganzen lateinischen Mittelalters benutzt. Offenbar war es weit verbreitet, und es kann nicht überraschen, daß Thomasin ein solches Gerät gekannt hat.

In seiner einfachsten Form ist ein Astrolabium ein ‚ebenes‘ Instrument: es besteht aus einer kreisförmigen Scheibe, ist mit einer einfachen Vorrichtung versehen, an der es senkrecht aufgehängt werden kann, und ist mit mehreren Skalierungen und beweglichen Meßeinrichtungen ausgestattet. Diese befinden sich auf beiden Seiten der Kreisscheibe und erlauben die Messung der Höhe eines Sternes und die Bestimmung der Auf- und Untergänge von Planeten und Fixsternen. Dabei werden insbesondere ein bewegliches Visierlineal benutzt, sowie zusätzliche Scheiben (mit stereographischen Bildern der Himmelskugel), durch deren Drehung die tägliche Rotation der Himmelskugel vorgeführt und nachgeahmt werden kann. Teile eines solchen Geräts sind in der Zeichnung im *Welschen Gast* zu erkennen. Sie ist allerdings so unvollständig, daß die genaue Funktionsweise eines Astrolabiums ohne weitere Erklärungen unverständlich bleiben muß.

Auch diese letzte Allegorie der von uns betrachteten Bilderreihe im *Welschen Gast* zeigt wieder mehr und anderes als nur eine hübsche Illustration: indem sie aus didaktischen Gründen den rationalen Aspekt von Astronomie hervorhebt und von einem eher mythologischen Aspekt der Astrologie abhebt. Nicht der im Text erwähnte (v. 8.956) berühmte arabische Astrologe Albumasar (= Abū Mašar) aus dem 9. Jahrhundert wird als Repräsentant vorgestellt, sondern Ptolemaios, der bedeutendste Astronom der Antike. Keine sagenumwobenen Sternbilder werden gezeichnet, wie etwa der Dichter Aratos von Soloi (1. Hälfte des 3. Jahrhunderts v. Chr.) sie in seinem Lehrgedicht *phainomena* beschrieben hatte – wodurch er die astronomisch-astrologischen Kenntnisse der griechisch-römischen oberen Gesellschaftsschichten entschieden beeinflusste –, sondern ein physikalisches Meßgerät, wie es Euklid, der ein Diopter zumindest kannte, vielleicht schon hätte benutzen können. Zwar wurde in Antike und Mittelalter zwischen den beiden Bezeichnungen Astronomie und Astrologie nicht streng unterschieden, wurden beide zeitweise synonym benutzt und zunächst sogar das Wort *astrologia* häufiger gebraucht als das Wort *astronomia*. Jedoch bahnte sich mit der Umwandlung des mittelalterlichen Weltbildes auch eine begriffliche Trennung zwischen Sternkunde und Sterndeutung an, und offenbar verweist Thomasin mit seiner Allegorie seine Leser bewußt auf Astronomie (Sternkunde) als einer mathematischen Wissenschaft.

5 Die Handschriften Cpg. 320 und Cpg. 330

Sowohl für den vorgebildeten kritischen als auch für den unkundigen Leser müssen diese vier Bilder des *quadrivium* im *Welschen Gast* in hohem Maße unbefriedigend sein, auch wenn man sie nur als schmückende Illustrationen oder Marginalien bewertet. Wichtige Einzelheiten sind unbedingt ergänzungs- oder korrekturbedürftig. Dieses Urteil fällt nicht günstiger aus, wenn man nicht nur die Handschrift Cpg. 389 (13. Jahrhundert), sondern noch zwei spätere Heidelberger Codices zum *Welschen Gast* betrachtet: die Handschrift a (Cpg. 320)⁸ und die Handschrift b (Cpg. 330)⁹, beide aus dem 15. Jahrhundert, alle drei übrigens aus dem süddeutschen Raum stammend (Abb. 7 u. 8).

Auffallend sind auf den ersten Blick die Gemeinsamkeiten: die übereinstimmende Reihenfolge und Anordnung der Fächer, von der beispielsweise jene einer Münchener Handschrift¹⁰ abweicht, und der formal gleiche Aufbau jedes einzelnen der Bilder: in der Mitte dieselben, nach didaktischen Gesichtspunkten ausgewählten szenischen Darstellungen, häufig mit begleitendem, lateinischem Text; rechts am Bildrand die Personifikationen; links jeweils dieselben Repräsentanten aus den klassischen Perioden der griechischen Mathematik. Dabei wird die Wahl dieser Repräsentanten nicht begründet; im Text werden für die Geometrie „Euclýdes“ und „Thales“, für die Arithmetik nicht nur „Pitâgoras“ sondern auch „Crisippus“, für die Musik sowohl „Millesjus“ als auch „Grêgorjus“ und für die Astronomie noch vor „Ptolomêus“ der „meister Albumasar“ genannt (v. 8.949ff.). – Auffallend sind auch die Beziehungen der stilistisch jeweils einheitlichen Einzelbilder untereinander: in Cpg. 330 eine durchgehende, nicht unterbrochene Folge von vier einander fast überlappenden rechteckigen Zeichnungen; in Cpg. 320 vier kreisrunde, übereinander angeordnete, voneinander unabhängige Medaillons; in Cpg. 389 vier offensichtlich eine Einheit bildende, fast quadratische Miniaturen. Diese Einheit wird oft als eine Leiter empfunden: was nachvollziehbar ist, aber die Frage nach der untersten und der höchsten der Leitersprossen oder der Wissenschaften aufwirft. – Doch überwiegen bei genauerem Hinsehen die neuen Fehler, die in den jüngeren Handschriften auftreten. So haben in Cpg. 320 die beiden Hilfskreise nichts mehr zu tun mit dem nur leicht angedeuteten ‚Dreieck‘, dessen Konstruktion sie ermöglichen sollen, läßt die rechteckige Zahlentafel keine durchgängige Rechenvorschrift erkennen, und bleibt die Analyse des Tonsystems bei fehlender Skalierung ohne Aussagekraft. Allein das von Klaudios Ptolemaios gehaltene Gerät mag die Funktion erfüllen, die in dem begleitenden lateinischen Text beschrieben wird. Und zahlreicher, gravierender noch sind die Mängel in Cpg. 330: keine Beischriften, fast keine Attribute (bei denen das Astrolabium in zwei konzentrische Kreise sich verwandelt hat, die Zahlentafel leer bleibt und vom gesuchten gleichseitigen Dreieck noch nicht einmal die gegebene Grundseite gezeichnet ist, wohl aber die Hilfskreise, die durch diese

Grundseite erst bestimmt werden), keine Handlungen: weder Konstruktionen noch Berechnungen, weder (Intervall-) Analysen noch Beobachtungen.¹¹

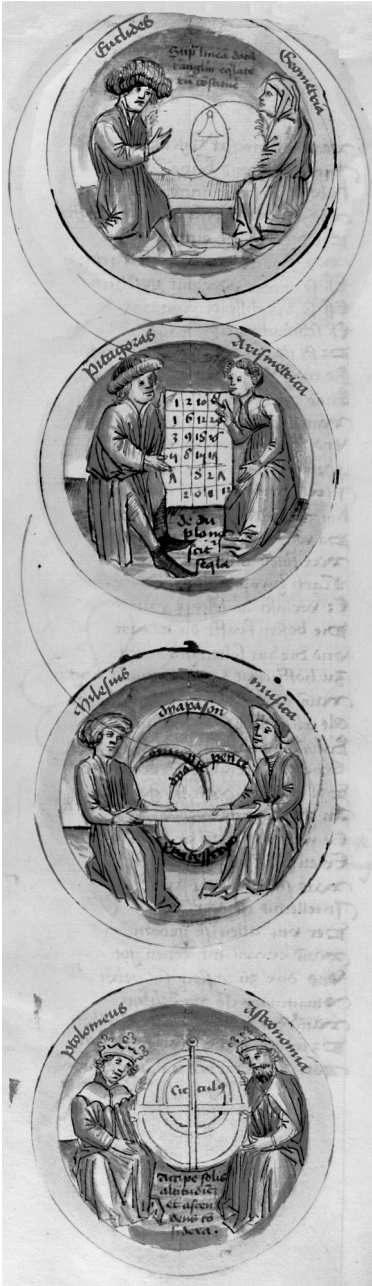


Abb. 7: Der Welsche Gast: quadrivium
Universitätsbibliothek Heidelberg
Cpg. 320, fol. 67^v (vgl. Farbbild 27)

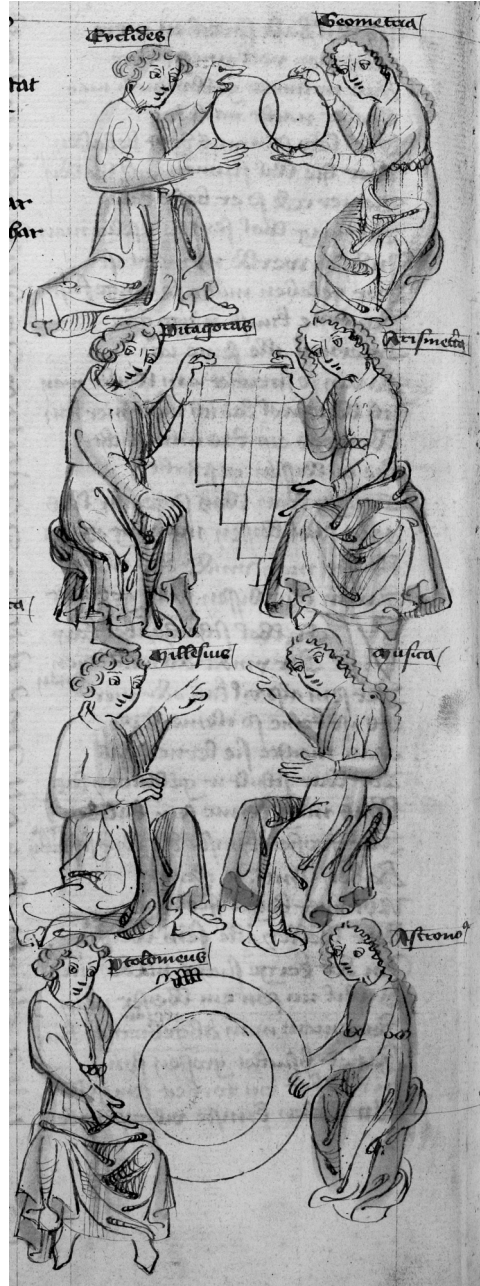


Abb. 8: Der Welsche Gast: quadrivium
Universitätsbibliothek Heidelberg
Cpg. 330, fol. 67^v (vgl. Farbbild 28)

6 Mathematik in allegorischen Bildern

Wer die Zeichnungen in den verschiedenen Handschriften vom *Welschen Gast* angefertigt hat, ist uns nicht bekannt, und wir wissen nicht, wie groß Thomasins Einfluss auf deren Ausführung gewesen sein konnte. Unterstellt man dennoch, daß im betrachteten Bilderzyklus die historischen Repräsentanten, die Attribute und die Texte nicht ohne Bedacht, sondern als ‚in Zusammenhang stehend‘ und im Hinblick auf das didaktische Ziel gewählt wurden, daß zwar in jedem Einzelbild die zeichnerische Ausführung mißglückt oder fehlerhaft ist, nicht aber deren Intention, dann zeigen die vier Bilder in Cpg. 389 nicht nur Illustrierendes, sondern wirklich Grundlegendes (im wörtlichen Sinne) aus Geometrie und Arithmetik, Musik und Astronomie. Dabei stehen theoretische Inhalte aus dem acht Jahrhunderte vor Boëthius entstandenen und von ihm teilweise überlieferten Werk Euklids im Mittelpunkt. (Allein die Astronomie verweist auch auf praktische Aspekte von Wissenschaft.) Insofern unterscheidet sich dieser Bilderzyklus des Thomasin inhaltlich von den allegorischen Texten bei Martianus Capella – deutlich aber auch von der Abbildung in der Bamberger Boëthius-Handschrift (Abb.2) und von anderen ikonischen Darstellungen des *quadrivium* im Mittelalter: beispielsweise von den berühmten Miniaturen (Abb. 9)¹² der elsässischen Äbtissin Herrad von Landsberg (auch Herrad von Hohenburg, Mitte 12. Jahrhundert) und von den bekannten Holzschnitten (Abb. 10)¹³ eines unbekanntens elsässischen Künstlers (Ende 15. Jahrhundert).

Herrad hatte in einem der schönsten Bilddokumente mittelalterlicher Kunst, *hortus deliciarum* genannt und als Textsammlung für Novizinnen im Chorfrauenstift Hohenburg auf dem Odilienberg bestimmt, die sieben jungfräulichen *artes liberales* im Kreis um eine *philosophia triceps* – mit den drei Köpfen *ethica, logica, phisica* – versammelt: unter dem theologischen Leitspruch *omnis sapientia a Domino Deo est*, dem Eingangsvers¹⁴ aus dem alttestamentarischen, ursprünglich hebräisch geschriebenen apokryphen *Buch Jesus Sirach* (auch *Liber Ecclesiasticus*) des jüdischen Weisheitslehrers Jesus ben Eleazar ben Sira (2. Jh. v. Chr.). Doch die den einzelnen Personifikationen mitgegebenen Attribute (für die mathematischen Fächer sind dies: Musikinstrumente und Zählschnur, Meßgeräte und Sternbilder, ähnlich wie in der Bamberger Boëthius-Handschrift) und die nur beschreibenden Texte:

- *musica sum late doctrix artis variate*
- *ex numeris consto, quorum discrimina monstro*
- *terrae mensuras per multas dirigo curas*
- *ex astris nomen traho per quae discitur omen*

lassen historische Bezüge und fachspezifische Inhalte höchstens oberflächlich erkennen. – Andererseits, und abweichend von Thomasin, nennt zwar jener elsässische Meister in den Beischriften zu seinen Holzschnitten die antiken Gelehrten Boëthius und Euklid, Pythagoras und Ptolemaios als

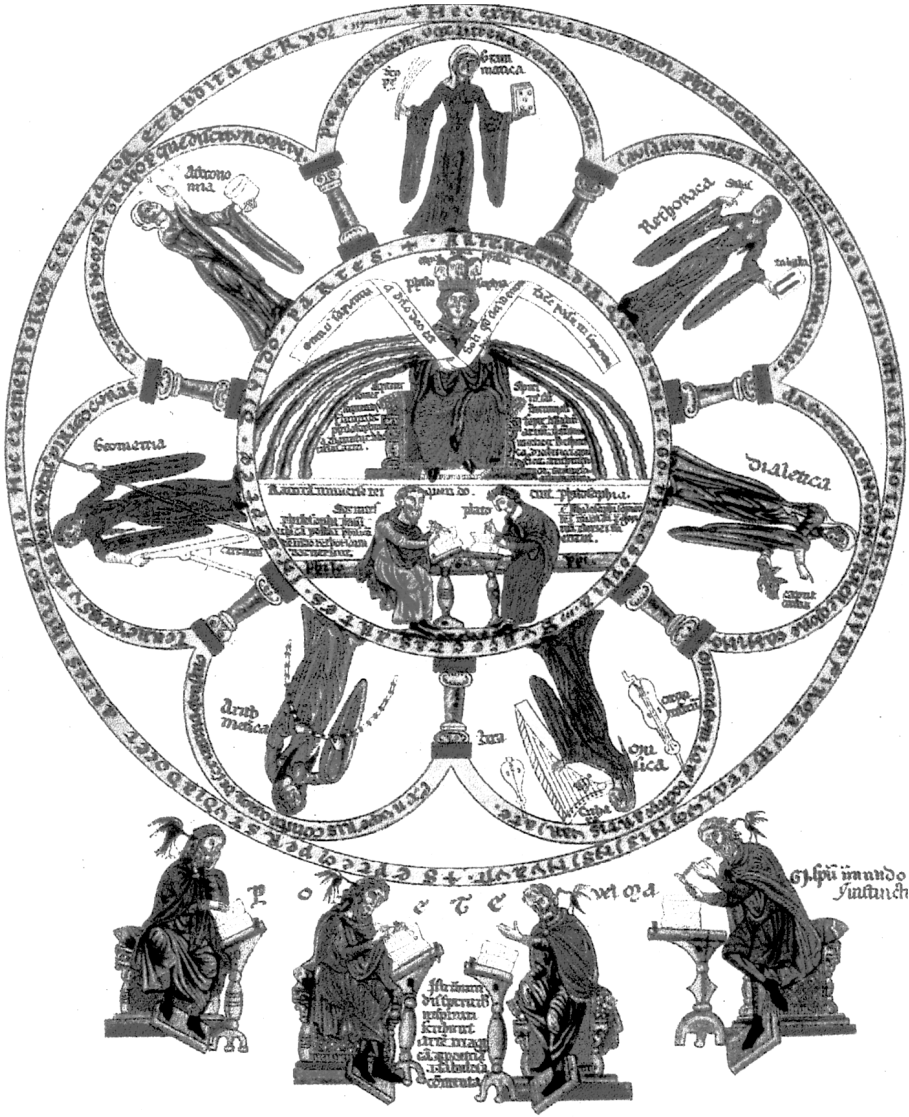


Abb. 9: Herrad von Landsberg: artes liberales Hortus deliciarum (Faksimile)
Foto: Backes, H. (1982). Die Hochzeit Merkurs und der Philologie. Frontispiz. (vgl. Farbbild 31)



Abb. 10: Elsässischer Meister: quadrivium
Foto: Reicke, E. (1924).¹³

Repräsentanten von (in wieder neuer Reihenfolge) Arithmetik und Geometrie, Musik und Astronomie:

*Ich kann zelen meisterlich rechen
vn überschlahen. Mit Bohecio
will ich die zal anfahren.*

*Ich kann pawen vnd wol
messen. Darumb will ich
Eclides nie vergessen.*

*Das schlahen auff dem am
poß clange. Darnach Picta
goron die stimb fande.*

*Deß hymels lauff mit farb
ich zir. Den könig
Ptholomen ich signir.*

Ihre Tätigkeiten aber sind ausschließlich auf die Praxis gerichtet: es wird auf einem Rechentisch oder ‚auf Linien‘ gerechnet, ein Haus wird vermessen und gebaut, Schmiede erzeugen die Töne (was an die Halbbrüder Jubal und Thubalkain erinnert, die alttestamentarischen ‚Erfinder‘ der Musik)¹⁵, und der gekrönte Maler (gekrönt auf Grund einer fälschlichen Identifizierung mit einem der Diadochenkönige) schmückt den Himmel – alles ohne systematisch-mathematischen Hintergrund. Dieselbe betont praxisorientierte Einstellung zeigt sich auch in den zahlreichen allegorischen Holzschnitten der *Margerita philosophica* des Freiburger Kartäusermönches Gregor Reisch aus dem frühen 16. Jahrhundert.

Eine ikonologische Betrachtung von Bildreihen oder von Einzelbildern kann offenbar – *was hier nur beispielhaft angedeutet ist* – die wechselvolle, zeitweise stagnierende Weitergabe mathematischer Kenntnisse durch die Zeiten beschreiben. Sie kann aber vor allem – *was hier nur unvollständig belegt ist* – den didaktisch bedeutsamen Wandel der Vorstellungen deutlich machen, die (in unserem Fall) mit dem Begriff ‚mathematische Wissenschaft‘ verbunden sind: Bilder vermögen die Idee darzustellen von dem, was die Dinge sind.¹⁶ Deshalb charakterisiert der unbekannte Künstler aus dem 15. Jahrhundert für sich und die Betrachter seiner Werke Mathematik als *mathematica practica*, und deshalb ordnet die Äbtissin Herrad im 12. Jahrhundert in ihren Miniaturen die mathematischen Fächer einer *philosophia divina* zu – beides nicht im Sinne einer strengen Einteilung in Klassen oder Perioden oder als Stufen einer Entwicklung mißzuverstehen! Der Bilderzyklus des Thomasin dagegen zeigt, als ein seltenes Beispiel aus dem Mittelalter, die klassischen Fächer des *quadrivium* als Disziplinen, die es eben nicht mit praktischer Tätigkeit oder religiöser Frömmigkeit zu tun haben, sondern die – im Sinne von Boëthius und in der Nachfolge von Euklid – in ihrer Gesamtheit eine ‚spähende‘, argumentierende und forschende Wissenschaft bilden: eine *mathematica speculativa*.

Anmerkungen

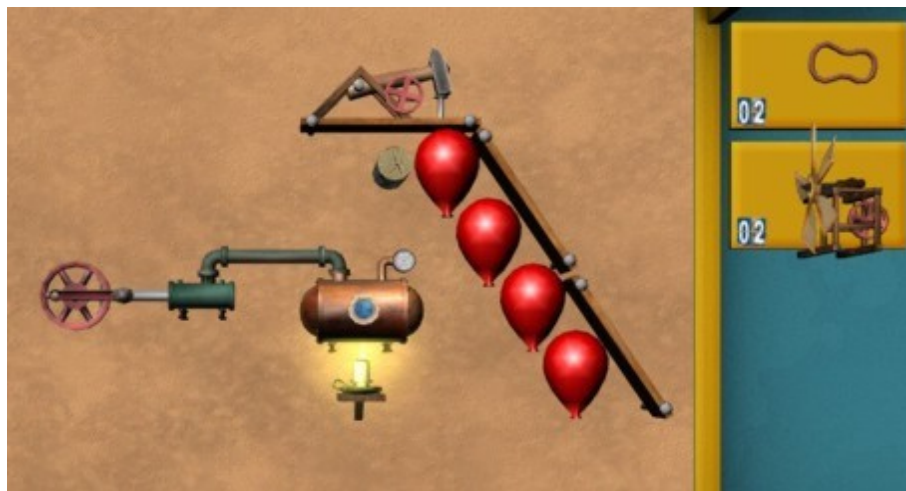
- ¹ Universitätsbibliothek Heidelberg. Codex Palatinus Germanicus 389 (= Cpg.389), fol.138^v und 139^r.
- ² Aristoteles. *Topik* A, 101a.
- ³ Staatsbibliothek Bamberg Msc. Class. 5, fol.9^v.
- ⁴ Aristoteles. *Metaphysik*, Buch V Kap. 13 - 1020a.
- ⁵ Euklid. *Sectio canonis* Prop. VIII: Si ab intervallo sesquialtero intervallum sesquetertertium aufertur, quod relinquitur, sesquooctavum est.
- ⁶ Platon. *Politeia* 531c und Platon. *Timaios* 80b.
- ⁷ Forschungsbibliothek Gotha. Memb. I 120. Vgl. Stolz (2004, 171).
- ⁸ Cpg.320, fol.67^v.
- ⁹ Cpg.330, fol.67^v.
- ¹⁰ Bayerische Staatsbibliothek München. Cod.g.m. 571.
- ¹¹ Vgl. mit einer Handschrift der Universitätsbibliothek Erlangen. Cod. Ms. 7, fol.19^v.
- ¹² Herrad von Landsberg. *Hortus deliciarum* .Ed. A. Straub, G. Keller. Faksimile-Ausgabe. Straßburg 1879/99.
- ¹³ Reicke, E. (1924, Nachdruck o.J.). *Der Gelehrte in der deutschen Vergangenheit*.
- ¹⁴ Sir. 1,1 = Eccl. 1,1.
- ¹⁵ 1. Mose 4,21u.22.
- ¹⁶ Der Ikonologie mathematischer Bilder gilt unser wissenschaftshistorisches und fachdidaktisches Interesse – worüber wir in einer ausführlicheren und umfassenderen Ausarbeitung berichten wollen.

Literatur

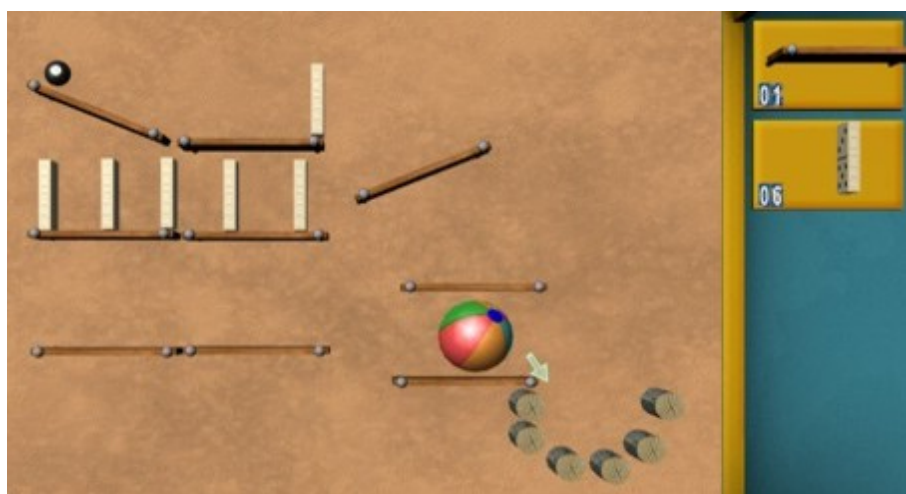
- Folkerts, M. (1970). *"Boethius" Geometrie II. Ein mathematisches Lehrbuch des Mittelalters*. Wiesbaden.
- Kluge (2002). *Etymologisches Wörterbuch der deutschen Sprache* Bearbeitet von Elmar Seebold. 24. Aufl. Berlin, New York.
- Lindgren, U. (1992). *Die Artes liberales in Antike und Mittelalter: Bildungs- und wissenschaftsgeschichtliche Entwicklungslinien*. Algorismus H. 8. München.
- Müller, R. A. (1996). *Geschichte der Universität. Von der Mittelalterlichen Universitas zur deutschen Hochschule*. München.
- Neumann, F./ Vetter, E. (1974). *Der Welsche Gast des Thomasin von Zerclaere*. Codex Palatinus Germanicus 389 der Universitätsbibliothek Heidelberg (Facsimilia Heidelbergensia Bd. 4). *Einführung in Thomasins Verswerk* (F. Neumann). *Die Handschrift und ihre Bilder* (E. Vetter). Wiesbaden.
- Neumann, F. / Vetter, E. (1977). *Zucht und schoene Sitte: Eine Tugendlehre der Stauferzeit mit 36 Bildern (16 davon farbig) aus der Heidelberger Handschrift Cod. Pal.Germ. 389 'Der Welsche Gast des Thomasin von Zerclaere'*. Wiesbaden.
- Oechelhäuser, A. von (1890). *Der Bilderkreis zum Wälschen Gaste des Thomasin von Zerclaere nach den vorhandenen Handschriften untersucht und beschrieben*. Heidelberg.
- Rückert, H. (Hrsg.) (1852, Nachdruck 1965). *Der Wälsche Gast des Thomasin von Zirclaria*. Quedlinburg, Leipzig, Nachdruck Berlin.
- Schönbeck, C. / Schönbeck, J. (2007). *Allegorische Bilder der Geometrie*. In: Wolfschmidt, (Hrsg.) (2007). *Es gibt für Könige keinen besonderen Weg zur Geometrie*. Festschrift für Karin Reich. Algorismus H. 59. Augsburg.

- Schönbeck, J. (2003). *Euklid*. Basel, Boston, Berlin.
- Scriba, Chr. J. (1985). Die mathematischen Wissenschaften im mittelalterlichen Bildungskanon der Sieben Freien Künste. *Acta historica Leopoldina* 16.
- Stolz, M (2004). *Artes-Liberales-Zyklen. Formationen des Wissens im Mittelalter*. 2 Bde. Tübingen, Basel.
- Tezmen-Siegel, J. (1985). *Die Darstellungen der septem artes liberales in der Bildenden Kunst als Rezeption der Lehrplangeschichte*. tuduv-Studien. Reihe Kunstgeschichte Bd. 14. München.
- Thaer, Cl. (Hrsg.) (1975). *Euklid. Die Elemente*. Darmstadt.
- Tropfke, J. (1980). *Geschichte der Elementarmathematik*. 4. Aufl. Bd. 1. *Arithmetik und Algebra*. Vollständig neu bearbeitet von Kurt Vogel, Karin Reich, Helmuth Gericke. Berlin, New York.
- Warncke, C.-P. (2005). *Symbol, Emblem, Allegorie*. Köln.

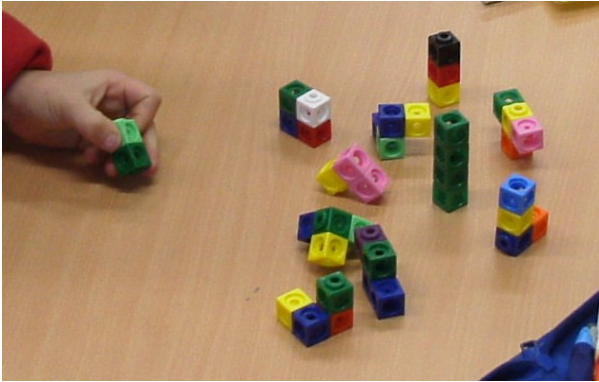
Farbabbildungen



Farbbild 1: Crazy Machines – Problem 39



Farbbild 2: Crazy Machines – Problem 17



Farbbild 3: SOMA Teile aus Steckwürfeln



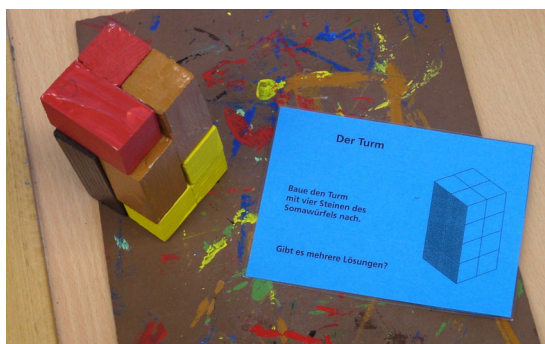
Farbbild 4: Sägeübung



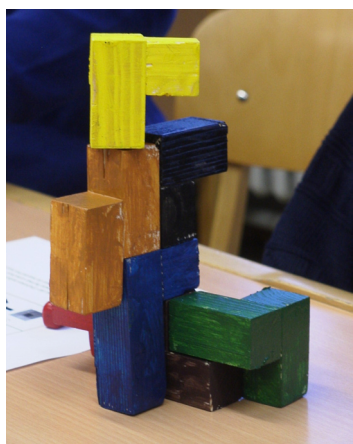
Farbbild 5:
Farbige SOMA Teile



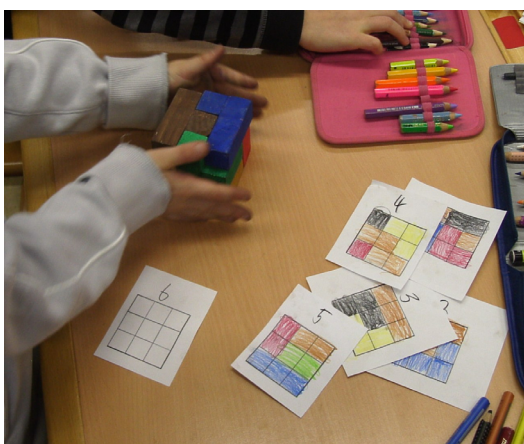
Farbbild 6: Farbige SOMA Teile



Farbbild 7: Karteikarten von Rickmeyer



Farbbild 8:
Figur aus SOMA Teilen



Farbbild 9: Ansichten eines SOMA Würfels

In dem Text steht, dass auf einem Quadratcentimeter 150 Haare wachsen
 Wieviel Quadratcentimeter hat der Kopf?

Tilo hat Cassandra eine Mütze aus Papier gemacht. Wie haben die Mütze
 zerschnitten und so gelegt das es ein Viereck ist 28 cm lang und 19 cm breit

$$\begin{array}{r} 28 \cdot 19 \\ \underline{280} \\ + 252 \\ \hline 532 \end{array}$$

Dann haben wir noch gezählt 4 Kästchen sind ein Zentimeterquadrat die
 Kästchen sind gezählt 2000

$$\begin{array}{r} 2000 : 4 = 500 \\ \underline{2000} \\ \hline 00 \\ \hline 00 \\ \hline 0 \end{array}$$

500 sind die Zentimeterquadrate

$$\begin{array}{r} 500 - 750 \\ \underline{5000} \\ \underline{2800} \\ \hline 2200 \end{array}$$

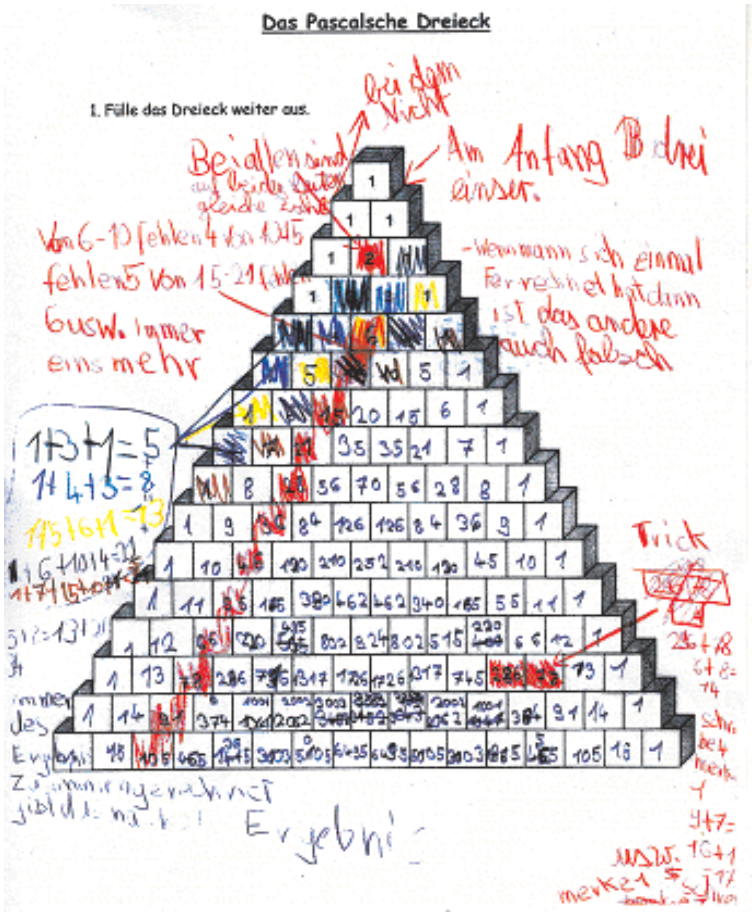
2200 das sind die Haare auf dem Kopf. In drei Tagen 1mm steht im Text

$$75000 \text{ m} = 7502 \text{ m} = 75 \text{ m}$$

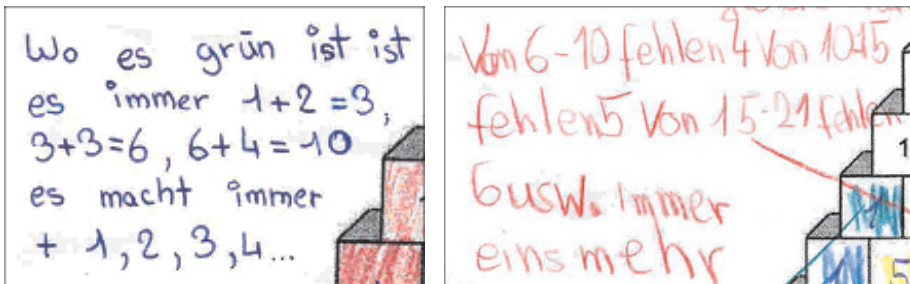
In einem Tag 25 Meter

Es stimmt! ▼

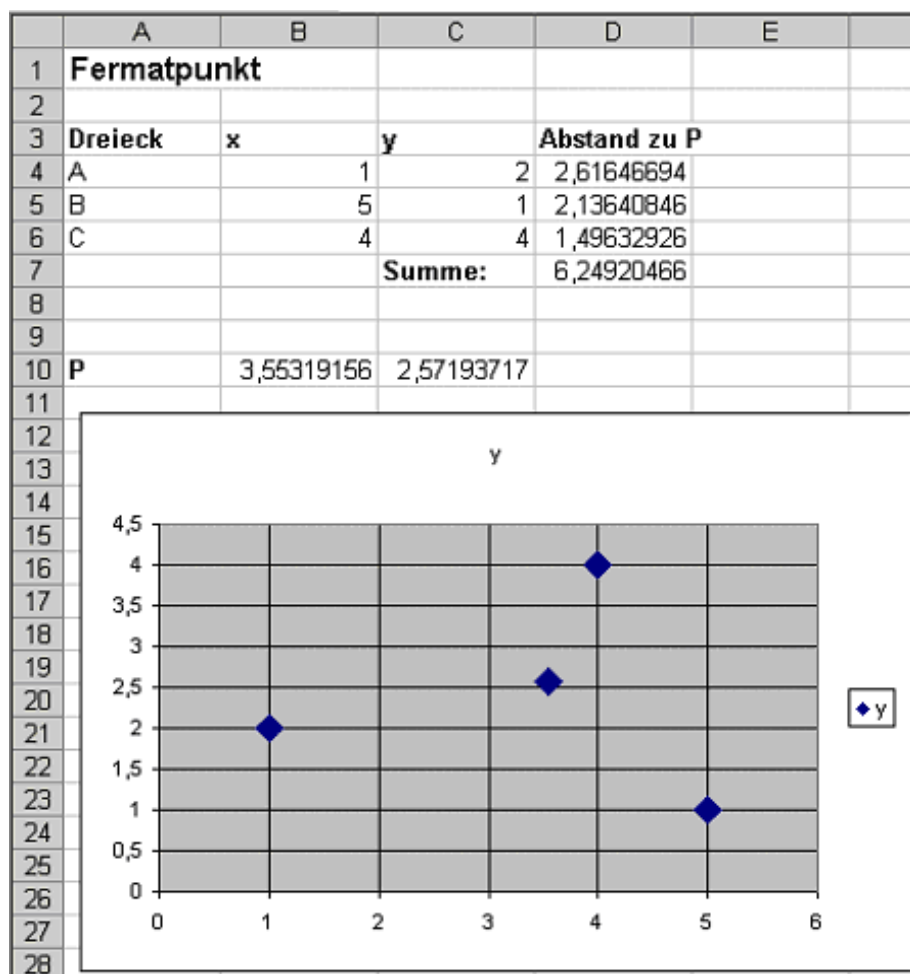
Farbbild 10: Schülerlösung



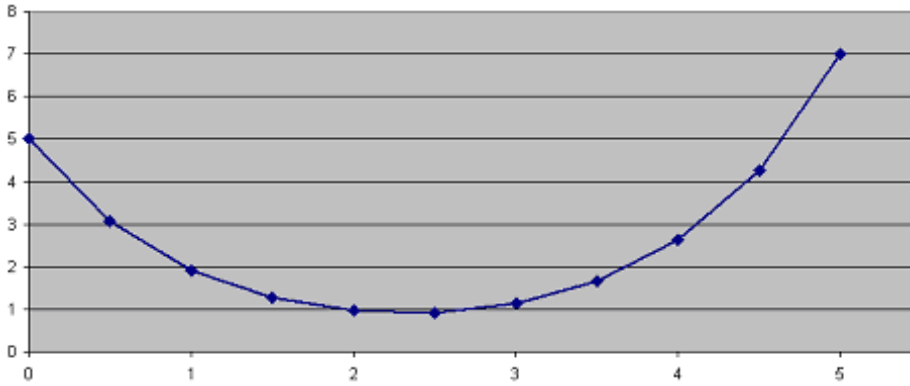
Farbbild 11: Entdeckungen



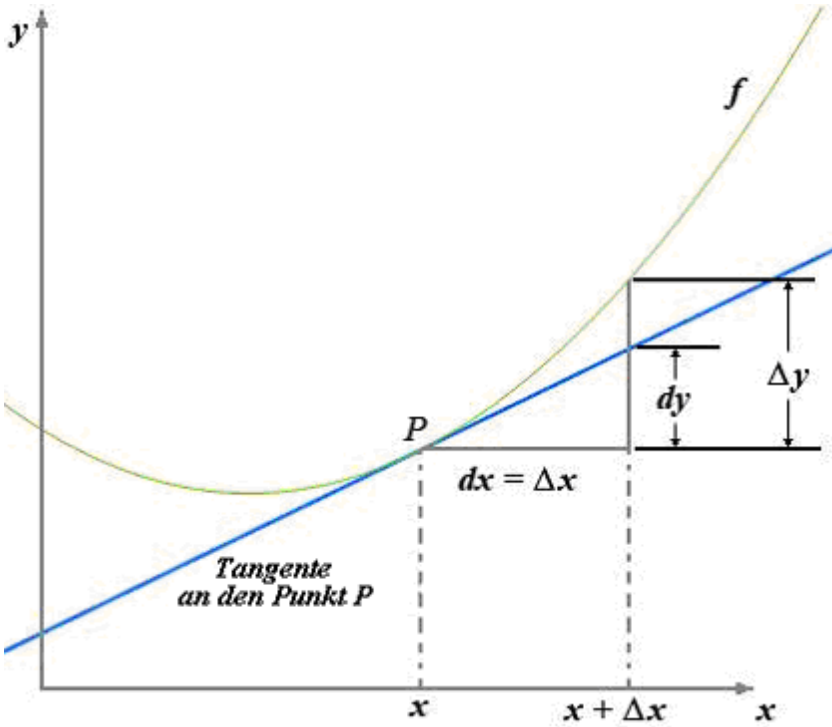
Farbbild 12: Beschreibungen



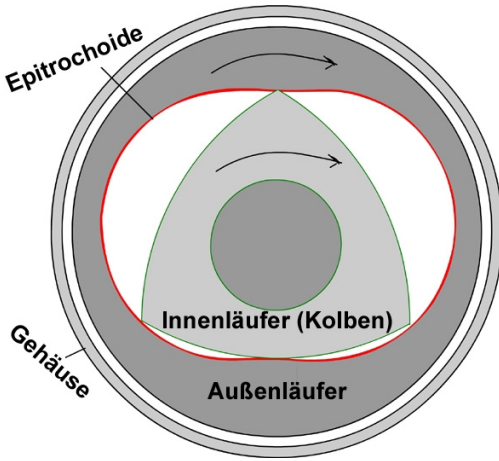
Farbbild 13: Fermatpunkt



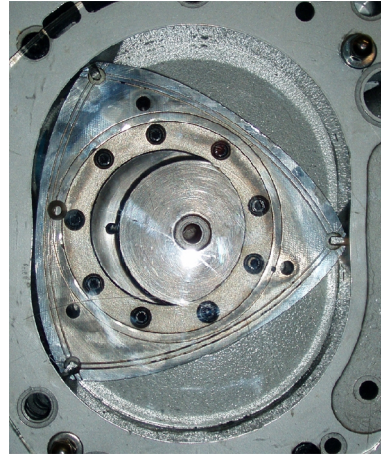
Farbbild 14: Hängende Kette



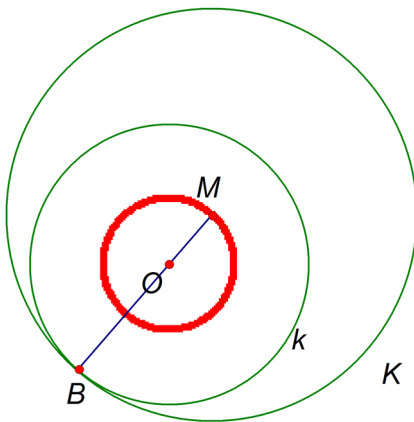
Farbbild 15: „Was ist ein Differential?“



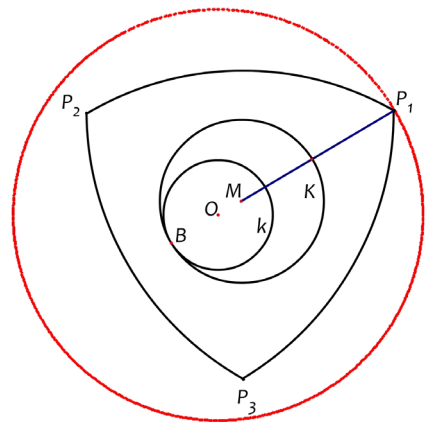
Farbbild 16: Drehkolbenmaschine



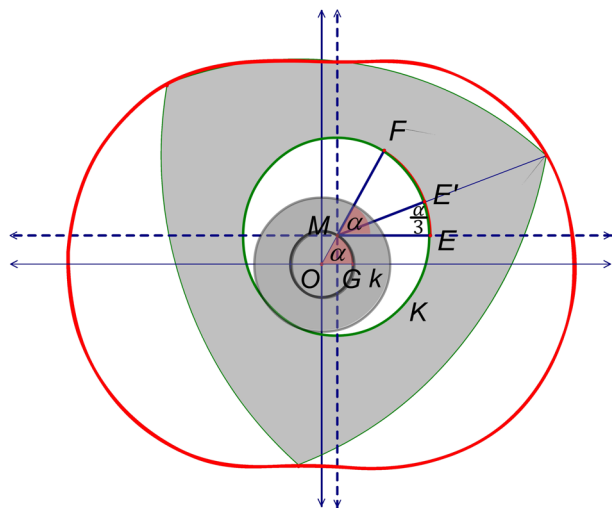
Farbbild 17: Kreiskolbenmaschine



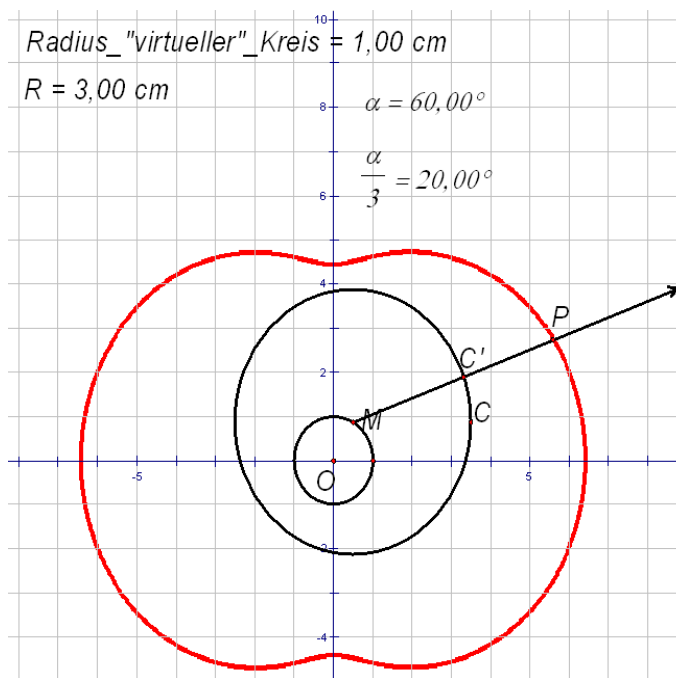
Farbbild 18: „Virtueller Kreis“



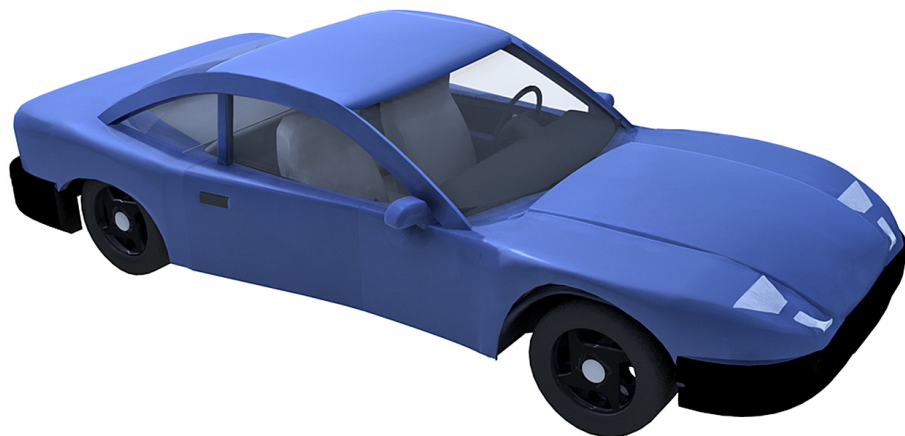
Farbbild 19: „Generierung“ der Epitrochoide



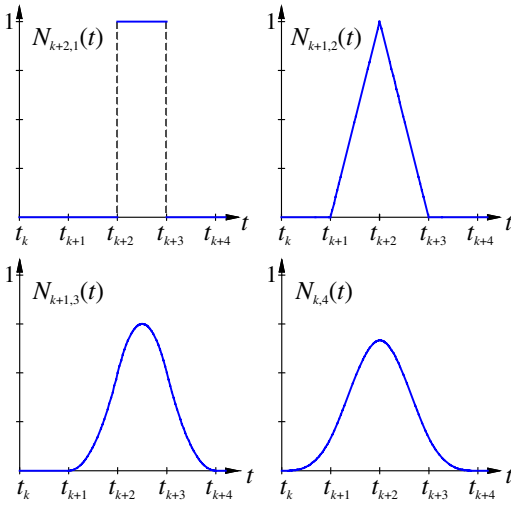
Farbbild 20: Drehwinkelbestimmung



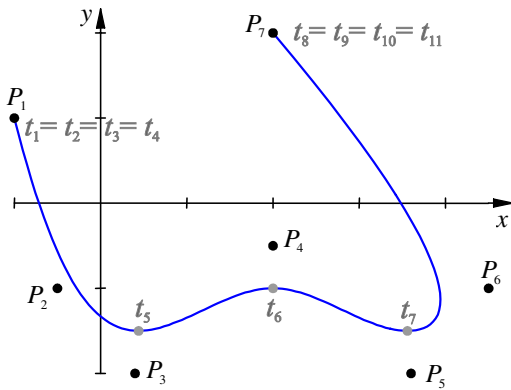
Farbbild 21: Generierung des „Wankelmotorgehäuses“



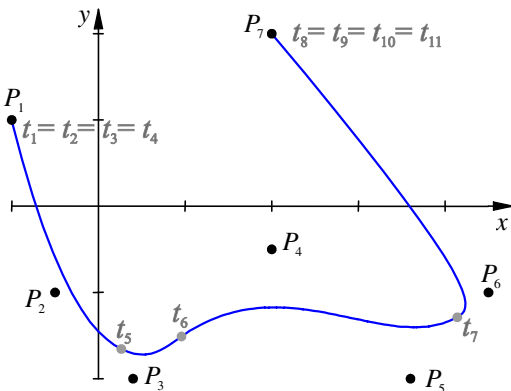
Farbbild 22: Ein mithilfe von Bézierflächen konstruiertes Automobil



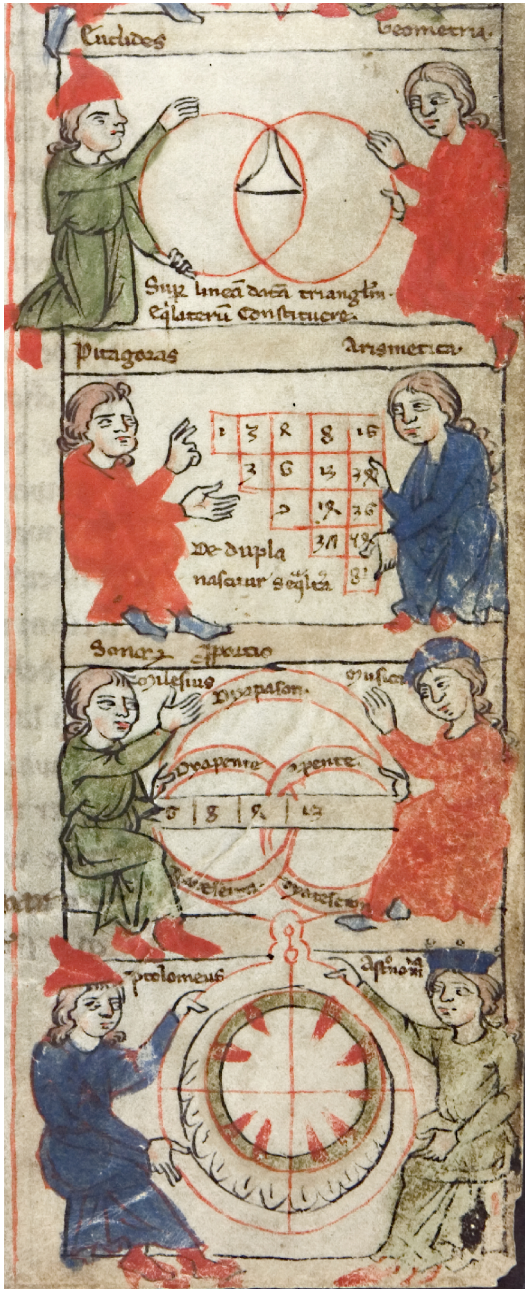
Farbbild 23: B-Spline-Basisfunktionen



Farbbild 24: Uniforme B-Splinekurve



Farbbild 25: Nicht uniforme B-Splinekurve



Farbbild 26: Quadrivium
(Heidelberg, Cpg. 389)



Farbbild 27: Quadrivium
(Heidelberg, Cpg. 320)



Farbbild 28: Quadrivium
(Heidelberg, Cpg. 330)



Farbbild 29: Zahlenbild (Boéthius-Handschrift)



Farbbild 30: Quadrivium (Boéthius-Handschrift)



Farbbild 31: Septem artes liberales (Herrad von Landsberg)

Autorinnen und Autoren

Abele, Albrecht, Prof. i.R. Dr., Studium (Mathematik und Physik) an der Universität Stuttgart, an der Universität und der Technischen Hochschule München und an der Universität Tübingen, 1959 Wissenschaftlicher Assistent, 1966 Promotion, beides an der TH Stuttgart, seit 1966 Dozent, seit 1970 Professor für Mathematik und Didaktik der Mathematik an der Pädagogischen Hochschule Heidelberg, seit 1997 im Ruhestand.

Forschungsschwerpunkte: Unterrichtsforschung in Grund-, Haupt- und Realschulen, Problemlösen, Sprache im Mathematikunterricht.

Fakultät für Natur- und Gesellschaftswissenschaften – Mathematik
Pädagogische Hochschule Heidelberg
Im Neuenheimer Feld 561, 69120 Heidelberg
abele@ph-heidelberg.de

Benz, Christiane, Prof. Dr., Studium (Lehramt Grund- und Hauptschule) an der Pädagogischen Hochschule Heidelberg, 1992–2002 Tätigkeit im Schuldienst, 2001 Diplomprüfung, 2002–2005 Abgeordnete Lehrerin und 2005–2006 Akademische Rätin, 2005 Promotion, alles an der Pädagogischen Hochschule Heidelberg, seit 2006 Professorin für Mathematik und ihre Didaktik (Schwerpunkt Primarstufe) an der Pädagogischen Hochschule Karlsruhe.

Forschungsschwerpunkte: Erforschung der Rechenstrategien von Grundschülerinnen und Grundschulern, Didaktik der Mathematik (Primar- und Elementarstufe), Mathematik im vorschulischen Bereich.

Fakultät III – Institut für Mathematik und Informatik
Pädagogische Hochschule Karlsruhe
Bismarckstraße 10, 76133 Karlsruhe
christiane.benz@ph-karlsruhe.de

Bienia, Daniel, Dr., Schreinerlehre, Studium (Lehramt Grund- und Hauptschule) an der Pädagogischen Hochschule Karlsruhe, 1994–1999 und 2002–2003 Tätigkeit im Schuldienst, 1999–2002 Abgeordneter Lehrer an der Pädagogischen Hochschule Karlsruhe, 2002 Promotion, seit 2003 Fachschulrat an der Pädagogischen Hochschule Heidelberg.

Forschungsschwerpunkte: Fächerübergreifender Unterricht.

Fakultät für Natur- und Gesellschaftswissenschaften – Technik
Pädagogische Hochschule Heidelberg
Im Neuenheimer Feld 561, 69120 Heidelberg
bienia@ph-heidelberg.de

Einig, Andrea, Dipl. paed., Studium (Lehramt Grund- und Hauptschule) an der Pädagogischen Hochschule Heidelberg, 1997–2001 Tätigkeit im Schuldienst, 2001–2006 Fachschulrätin, 2006 Diplomprüfung, seit 2006 Abgeordnete Lehrerin, alles an der Pädagogischen Hochschule Heidelberg.

Forschungsschwerpunkte: Zahlbegriffsentwicklung im frühen Kindesalter, Entwicklung des mathematischen Denkens bei 3- bis 4-jährigen Kindern.

Fakultät für Natur- und Gesellschaftswissenschaften – Mathematik
Pädagogische Hochschule Heidelberg
Im Neuenheimer Feld 561, 69120 Heidelberg
einig@ph-heidelberg.de

Filler, Andreas, Prof. Dr., Studium (Mathematik und Physik), 1988 Promotion, 1988–1992 und 1999–2004 Wissenschaftlicher Assistent und Mitarbeiter, alles an der Humboldt-Universität Berlin, 1992–1999 Tätigkeit im Höheren Schuldienst, 2007 Habilitation, seit 2004 Professor für Mathematik und Didaktik der Mathematik an der Pädagogischen Hochschule Heidelberg.

Forschungsschwerpunkte: Didaktik der Geometrie, Computereinsatz und Problemlösen im Mathematikunterricht, Förderung begabter Schülerinnen und Schüler, Modellbildung in Mathematik und Informatik.

Fakultät für Natur- und Gesellschaftswissenschaften – Mathematik
Pädagogische Hochschule Heidelberg
Im Neuenheimer Feld 561, 69120 Heidelberg
filler@ph-heidelberg.de

Gieding, Michael, Dr., Wissenschaftlicher Mitarbeiter/Akademischer Rat für Mathematik und Informatik an der Pädagogischen Hochschule Heidelberg.

Fakultät für Natur- und Gesellschaftswissenschaften – Mathematik und Informatik (IfD/I)
Pädagogische Hochschule Heidelberg
Im Neuenheimer Feld 561, 69120 Heidelberg
gieding@ph-heidelberg.de

Hafenbrak, Bernd, Prof. Dr., Studium (Mathematik und Physik) an der Universität Stuttgart, 1970–1976 Assistent an der Universität Stuttgart, 1976–1977 Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Pädagogischen Hochschule Heidelberg, 1977 Promotion, 1978–1980 Tätigkeit im Höheren Schuldienst, 1980–1990 Akademischer Rat an der Pädagogischen Hochschule Heidelberg, seit 1990 Professor für Mathematik und ihre Didaktik an der Pädagogischen Hochschule Weingarten.

Forschungsschwerpunkte: Computereinsatz im Mathematikunterricht, Stochastik in Haupt- und Realschule (Sekundarstufe I).

Fakultät II – Mathematik
Pädagogische Hochschule Weingarten
Kirchplatz 2, 88250 Weingarten
hafenbrak@ph-weingarten.de

Hofsäß, Gerhard, Prof. i.R. Dr., Studium (Mathematik und Chemie) an der Universität Stuttgart, 1966 Assistent an der Pädagogischen Hochschule Schwäbisch Gmünd, 1970 Promotion, seit 1968 Dozent, seit 1972 Professor für Mathematik und Didaktik der Mathematik an der Pädagogischen Hochschule Heidelberg, seit 2003 im Ruhestand.

Forschungsschwerpunkte: Entwicklung von Konzeptionen für den Mathematikunterricht, Lehrerfortbildung.

Fakultät für Natur- und Gesellschaftswissenschaften – Mathematik
Pädagogische Hochschule Heidelberg
Im Neuenheimer Feld 561, 69120 Heidelberg
hofsass@ph-heidelberg.de

Kaufmann, Sabine, Prof. Dr., Studium (Lehramt Grund- und Hauptschule) an der Pädagogischen Hochschule Heidelberg, 1989–1999 Tätigkeit im Schuldienst, 1998 Diplomprüfung an der Pädagogischen Hochschule Heidelberg, 1999–2002 Abgeordnete Lehrerin, 2002 Promotion, beides an der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg, seit 2002 Wissenschaftliche Assistentin/Abgeordnete Lehrerin, seit 2008 Professorin für Mathematik und Didaktik der Mathematik an der Pädagogischen Hochschule Heidelberg.

Forschungsschwerpunkte: Früherkennung von und Förderung bei Rechenschwäche, Entwicklung des Zahlensinns bei Grundschülerinnen und Grundschulern.

*Fakultät für Natur- und Gesellschaftswissenschaften – Mathematik
Pädagogische Hochschule Heidelberg
Im Neuenheimer Feld 561, 69120 Heidelberg
s.kaufmann@ph-heidelberg.de*

Lorenz, Jens Holger, Prof. Dr., Studium (Mathematik und Physik, Pädagogik und Psychologie) in Frankfurt, Paris, Bielefeld und Mainz, 1970 Dipl. Math., 1980 Dr. phil. habil., 1982 Dipl. Psych., 1990 Approbation als Kinder- und Jugendpsychotherapeut, 1993 Professor an der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg, seit 2002 Professor für Mathematik und Didaktik der Mathematik an der Pädagogischen Hochschule Heidelberg.

Forschungsschwerpunkte: Kognitive Aspekte des Denkens und Lernens, Gestörte Lernprozesse (Dyskalkulie), Anschauung und Veranschaulichungsmittel.

*Fakultät für Natur- und Gesellschaftswissenschaften – Mathematik
Pädagogische Hochschule Heidelberg
Im Neuenheimer Feld 561, 69120 Heidelberg
jens.lorenz@t-online.de*

Mauve, Reinhard, Prof. i.R. Dr., Studium (Mathematik und Sport) an der Universität Hamburg, Tätigkeit im Höheren Schuldienst in Köln, Wissenschaftlicher Assistent, 1967 Promotion, beides an der Universität zu Köln, seit 1973 Dozent, seit 1976 Professor für Mathematik und Didaktik der Mathematik an der Pädagogischen Hochschule Heidelberg, seit 2006 im Ruhestand.

Forschungsschwerpunkte: Mathematik, Didaktik der Mathematik (Sekundarstufe I), Computerverwendung in der Schule.

*Fakultät für Natur- und Gesellschaftswissenschaften – Mathematik und Informatik (IfD/I)
Pädagogische Hochschule Heidelberg
Im Neuenheimer Feld 561, 69120 Heidelberg
mauve@ph-heidelberg.de*

Oldenburg, Reinhard, Prof. Dr., Studium (Mathematik und Physik), 1993 Diplomprüfung, beides an der Universität Frankfurt, 1998 Promotion an der Universität Göttingen, 1998–2006 Tätigkeit im Höheren Schuldienst, 2006 Professor für Mathematik und Didaktik der Mathematik an der Pädagogischen Hochschule Heidelberg, seit 2008 Professor für Gymnasialdidaktik der Mathematik und der Informatik an der Universität Frankfurt.

Forschungsschwerpunkte: Computereinsatz im Mathematikunterricht, Realitätsorientierter Unterricht, Didaktik der Algebra.

*Institut für Didaktik der Mathematik
Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt
Senckenberganlage 9–11
60325 Frankfurt am Main
oldenburg@math.uni-frankfurt.de*

Poelstra, Birte, Studium (Lehramt GHR) an der Universität Dortmund, seit 2007 Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts (IEEM) an der Universität Dortmund.

*Fachbereich Mathematik – IEEM
Universität Dortmund
Vogelpothsweg 87, 44221 Dortmund*

Schönbeck, Charlotte, Dr., Studium (Physik, Mathematik und Astronomie) an den Universitäten Freiburg und Kiel, 1963 Promotion an der Universität Kiel, 1964–1967 Tätigkeit im Höheren Schuldienst, 1972–1981 und nach 1994 Lehr- und Forschungsaufgaben zur Ge-

schichte der Physik und der Technik an der Pädagogischen Hochschule Heidelberg, 1981–1995 Leiterin der Gesamtreaktion „Technik und Kultur“ der Georg-Agricola-Gesellschaft. Forschungsschwerpunkte: Geschichte der Physik und der Technik in der Renaissance, Geschichte der Physik im 19. und 20. Jahrhundert (insbes. Zeit des Nationalsozialismus).

Fakultät für Natur- und Gesellschaftswissenschaften
Pädagogische Hochschule Heidelberg
Im Neuenheimer Feld 561, 69120 Heidelberg
juergen.schoenbeck@urz.uni-heidelberg.de

Schönbeck, Jürgen, Prof. i.R., Studium (Mathematik und Physik) an den Universitäten Marburg und Kiel, 1962–1969 Tätigkeit im Höheren Schuldienst, 1968–1970 Lehr- und Forschungsaufgaben zur Geschichte und Didaktik der Mathematik an der Pädagogischen Hochschule Flensburg, seit 1970 Professor für Mathematik und Didaktik der Mathematik an der Pädagogischen Hochschule Heidelberg, seit 2001 im Ruhestand.

Forschungsschwerpunkte: Geschichte und Grundlagen von Mathematik und Schulmathematik (insbes. Geometrie), Didaktik der Mathematik (Sekundarstufe I), Wandlungen im Lehren und Lernen von Mathematik.

Fakultät für Natur- und Gesellschaftswissenschaften – Mathematik
Pädagogische Hochschule Heidelberg
Im Neuenheimer Feld 561, 69120 Heidelberg
juergen.schoenbeck@urz.uni-heidelberg.de

Selter, Christoph, Prof. Dr., Studium (Lehramt Primarstufe), Promotion, 1986–1987 Wissenschaftliche Hilfskraft, 1989–1996 Wissenschaftlicher Angestellter, alles an der Universität Dortmund, 1996–2005 Professor für Mathematik und Didaktik der Mathematik an der Pädagogischen Hochschule Heidelberg, seit 2005 Professor für Mathematikdidaktik am Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts (IEEM) an der Universität Dortmund.

Forschungsschwerpunkte: Erforschung der Rechenstrategien von Grundschülerinnen und Grundschulern, Konzeptionen zur Leistungsfeststellung und -beurteilung im Mathematikunterricht, Lernumgebungen zum entdeckenden Lernen, zum produktiven Üben und zum flexiblen Rechnen, ‚Input orientierte‘ Aspekte der Steigerung der Unterrichtsqualität (u.a. Lehreraus- und -fortbildungsprogramme).

Fachbereich Mathematik – IEEM
Universität Dortmund
Vogelpothsweg 87, 44221 Dortmund
christoph.selter@math.uni-dortmund.de

Struve, Horst, Prof. Dr., Studium (Mathematik, Physik und Wissenschaftstheorie) an der Universität zu Köln, 1979 Diplomprüfung an der Universität zu Köln und Promotion an der Universität Kiel, 1988 Habilitation, 1992 bzw. 1993 Professor an der Pädagogischen Hochschule Heidelberg bzw. an der Universität Koblenz-Landau, seit 1996 Professor für Mathematik und ihre Didaktik an der Universität zu Köln.

Forschungsschwerpunkte: Entwicklung von mathematischen Theorien bei Schülern und in der Geschichte.

Seminar für Mathematik und ihre Didaktik
Universität zu Köln
Gronewaldstraße 2, 50931 Köln
h.struve@uni-koeln.de

Ulm, Volker, Prof. Dr., Studium (Mathematik und Physik) und Promotion an der Universität München, 1997–2002 Gymnasiallehrer, 2001–2006 Mitarbeiter am Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik an der Universität Bayreuth, 2004 Professurvertreter an der Pädagogischen

Hochschule Heidelberg, 2006 Professurvertreter an den Pädagogischen Hochschulen Karlsruhe, seit 2007 Inhaber des Lehrstuhls für Didaktik der Mathematik an der Universität Augsburg. Forschungsschwerpunkte: Grundfragen des Lehrens und Lernens von Mathematik, Neue Medien im Mathematikunterricht (insbes. Dynamische Mathematik), Förderung mathematisch Begabter, Konzeptionen von Lehrerfortbildung und von Initiativen zur systematischen Weiterentwicklung des Bildungswesens.

Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik
Universität Augsburg
86135 Augsburg
ulm@math.uni-augsburg.de

Volkert, Klaus, Prof. Dr., Studium (Mathematik, Physik und Philosophie) an den Universitäten Heidelberg und Saarbrücken, Redakteur im Verlagswesen, Promotion, Akademischer Rat an der Pädagogischen Hochschule Heidelberg, Habilitation, Professor an der Universität Frankfurt, derzeit Professor für Mathematik und ihre Didaktik an der Universität zu Köln.

Forschungsschwerpunkte: Geschichte der Mathematik und ihres Unterrichts, Entwicklung des mathematischen Denkens.

Seminar für Mathematik und ihre Didaktik
Universität zu Köln
Gronewaldstraße 2, 50931 Köln
k.volkert@uni-koeln.de

Schriftenreihe der Pädagogischen Hochschule Heidelberg

Herausgegeben von der Pädagogischen Hochschule Heidelberg

Band 42: Bernhard Petermann (Hrsg.)

Islam – Erbe und Herausforderung

(5. Heidelberger Dienstagsseminar)

Mit Beiträgen von Bekir Alboğa, Hayrettin Aydın, Sandra Costes, Mostafa Danesch, Nurhan Deligezer, Suzanne El Takach, Nadeem Elyas, Margarete Jäger, Raif Georges Khoury, Albrecht Lohrbächer, Wolfgang Merkel, Samir Mourad, Peter Müller, Hans-Bernhard Petermann, Christoph Reuter, Karl Schneider, Willi Wölfling (†), Hans Zirker.

2004, 308 S.

Der Islam ist heute die in Deutschland nach dem Christentum zweitgrößte Religion, eine kulturell bedeutende Kraft. Dennoch kennen wenige den Islam genauer, auch Lehrerinnen und Lehrer nicht, die fast alle auch muslimische Kinder und Jugendliche in ihren Klassen haben. Dieses Defizit fordert heraus: Welches sind die tragenden Säulen dieser gleichzeitig nahen und fremden Religion, und welche Lebensformen haben Muslime entwickelt und entwickeln sie, auch in Deutschland?

Band 43: Hans Peter Henecka / Frank Lipowsky

Vom Lehramtsstudium in den Beruf

Statuspassagen in pädagogische und außerpädagogische Berufsfelder.

Ergebnisse einer repräsentativen PH-Absolventenbefragung in Baden-Württemberg.

2004, 245 S.

Das Projekt „Wege in den Beruf“ untersuchte in einer Längsschnittstudie die beruflichen Integrationsprozesse von Lehramtsabsolventen, die zwischen 1995 und 1997 ihr erstes Staatsexamen für die Lehrämter an Grund-, Haupt- und Realschulen an den Pädagogischen Hochschulen Baden-Württembergs ablegten.

Die Studie zeigt dabei nicht nur die faktischen Einstellungschancen in den staatlichen und privaten Schuldienst auf, sondern analysiert auch die Beschäftigungschancen von Lehramtsabsolventen in der freien Wirtschaft in Abhängigkeit vom Studienort, dem studierten Lehramt, dem Geschlecht und der individuellen Mobilitätsbereitschaft. Die zusätzliche Auswertung und Analyse von qualitativen Tiefeninterviews mit Lehramtsabsolventen beleuchten berufliche Statuspassagen zwischen „Zwangsläufigkeit“ und „Eigenkonstruktion“.

Band 44: Jörg Thierfelder

Gelebte Verantwortung – Glauben und Lernen in der Geschichte

Studien zur kirchlichen Zeitgeschichte II

Herausgegeben von Volker Herrmann und Hans-Georg Ulrichs

2004, 270 S.

Jörg Thierfelder schreibt in seinen Aufsätzen über das Leben in und mit der Kirche im »Dritten Reich« und in der Zeit nach den Zweiten Weltkrieg. Unermüdlich hat er die großen und kleinen Verhältnisse erforscht, beschrieben und durch Ausstellungen bekannt gemacht. Personen und Ereignisse dieser Alltagsgeschichte treten so lebendig vor Augen, dass sie auch ins Herz geschlossen werden, wo sie aller Erfahrung nach nicht nur innere Bewegung auslösen, sondern auch wieder nach außen dringen.

Band 45: Hans-Werner Huneke (Hrsg.)

Geschriebene Sprache

Strukturen, Erwerb, didaktische Modellbildungen

Mit Beiträgen von Elin-Birgit Berndt, Elisabeth Birk, Clemens Gruber, Sonja Häffner, Hans-

Werner Huneke, Rubén Darío Hurtado V., Erika Margewitsch, Veronika Mattes, Martin Neef, Thorsten Pohl, Christa Röber, Tobias Thelen.

2005, 228 S.

Beim Erwerb der geschriebenen Sprache kommt der eigenaktiven Aneignung eine besondere Bedeutung zu. Schon Kinder, die Lesen und Schreiben lernen, gehen auf eine intensivierte Suche nach Strukturen, nach Invarianzen auf dem für sie neuen Gegenstandsfeld der Schrift. Sie konstruieren bei ihren Lese- und Schreibversuchen subjektives, zunächst hypothetisches Wissen über Funktion und Strukturmerkmale der geschriebenen Sprache und nutzen dieses Wissen für ihre eigenen Strategien zur Problemlösung beim Lesen und Schreiben. Dabei lässt sich beobachten, dass die Erwerbsprozesse trotz individueller Varianz charakteristischen Mustern folgen, oft unabhängig von bestimmten Unterrichtsmethoden. Ausschlaggebend sind vielmehr die Sachstruktur des Lerngegenstandes, also systematische Merkmale der geschriebenen Sprache, und die Charakteristika der sprachbezogenen Lernprozesse.

Von einer solchen erwerbsorientierten Perspektive gehen die Beiträge in diesem Sammelband aus. Sie orientieren sich zumeist empirisch und fragen nach Strukturmerkmalen der geschriebenen Sprache, nach Erwerbsverläufen und nach Möglichkeiten einer aussichtsreichen didaktischen Modellbildung. Das thematische Spektrum reicht dabei von der Vorschulzeit über den Schriftspracherwerb auf der Primarstufe und die Sekundarstufe bis zum Schreiben im Studium.

Band 46: Hans Peter Henecka, Heinz Janalik und Doris Schmidt (Hrsg.)

Jugendkulturen

(6. Heidelberger Dienstagseminar)

Mit Beiträgen von Alenka Barber-Kersovan, David Damberg, Hans-Werner Carlhoff, Klaus Farin, Rolf Göppel, Sabrina Kästner, Karin Mann, Daniela Mauch, Patrizia Preissler, Jürgen Zinnecker

2005, 202 S.

Beobachtet man die gegenwärtigen Lebenswelten von Jugendlichen, dann lässt sich eine Vielzahl jugendkultureller Szenen und Milieus feststellen. Im Vergleich zu früheren Jugendgenerationen sind ganz neue Kommunikations- und Handlungsfelder entstanden. Sie bieten jungen Menschen weitaus differenziertere Options- und Gestaltungsmöglichkeiten. Die meisten Jugendlichen nehmen diese kulturellen Impulse und szenischen Codes für unterschiedlich lange Zeiträume in Anspruch. Dabei nutzen sie die jeweils aktuellen Animationen und Mikrokosmen mit häufig rasch wechselnden Engagements und gelegentlich hoch selektiven Praktiken.

Bildungsinstitutionen wie Schulen und Hochschulen, aber auch Jugend- und Sportverbände sind gut beraten, sich intensiv mit diesen neuen Sozialisationsfeldern zu beschäftigen: Sie begleiten die etablierten Erziehungsprozesse wirkungsvoll und attraktiv und stehen nicht selten in Konkurrenz zu ihnen.

Band 47: Rose Boenicke, Alexandra Hund, Thomas Rihm und Veronika Strittmatter-Haubold (Hrsg.)

Innovativ Schule entwickeln

Kompetenzen, Praxis und Visionen

(7. Heidelberger Dienstagseminar)

Mit Beiträgen von Kurt Aurin, Klaus-Dieter Block, Rose Boenicke, Arno Combe, Hendrik Dahlhaus, Wolfgang Edelstein, Uffe Elbaek, Gerhard Fatzer, Gerd-Ulrich Franz, Heidrun von der Heide, Volker F. Herion, Jana Hornberger, Michael Kirschfink, Barbara Koch-Priewe, Marlies Krainz-Dürr, Botho Priebe, Thomas Rihm, Undine Schmidt, Werner Schnatterbeck, Ingrid Schneider, Marianne Teske, Andreas Werner, Traute Werner.

2006, 237 S.

Mit dem Titel *Innovativ Schule entwickeln* wird deutlich gemacht, dass unser Bildungswesen in Bewegung geraten ist, Modernisierungen in Gang gekommen sind und dennoch weitere Entwicklungsschritte dringend anstehen. Innovative Konzepte liegen dazu vor. Sie orientieren

sich an der Idee des Prozesses vom lebenslangen Lernen und weitergehend in der Perspektive, die Beteiligten aktiv in die Konzepte und in die Realisation einzubeziehen. Welche Chance es für die Schule und unser Bildungssystem gibt, wird in den Beiträgen dargelegt. Wichtig ist, dass sowohl die Theorie als auch Beispiele aus der Praxis ihren Platz in diesem Band haben. Im ersten Kapitel *Kompetenzen für Menschen in unserer Gesellschaft* geben die Autoren Antworten auf die Frage, welche Fähigkeiten junge Menschen brauchen, um in der Welt von heute und morgen bestehen zu können. Der zweite Abschnitt umfaßt Beiträge zur *Professionalität und Professionalisierung im Lehrerberuf*. Ein einziges Modell der Schulentwicklung gibt es nicht, vielmehr bestehen ganz unterschiedliche Ansatzpunkte und *Modelle der Schulentwicklung*, wie sie im dritten Kapitel des Buchs beschrieben sind. In den Beiträgen des folgenden Kapitels werden notwendige *Veränderungsschritte* und Weiterentwicklungen im Bildungssystem auf unterschiedlichen Ebenen des schulischen Lebens angegangen. Im Kapitel *Visionen* verfolgen die Autoren das Ziel, Schule derart zu konzipieren, dass sie angemessene Antworten auf die Herausforderungen im Zeitalter der Bildungsglobalisierung geben kann.

Band 48: Lissy Jäkel, Susanne Rohrmann, Michael Schallies und Manuela Welzel (Hrsg.)

Der Wert der naturwissenschaftlichen Bildung

(8. Heidelberger Dienstagseminar)

Mit Beiträgen von Susanne Bögeholz, Ernst Peter Fischer, Ulrich Gebhard, Peter Janich, Lissy Jäkel, Helmuth Köck, Anja Lembens, Kornelia Möller, Angela Risch, Susanne Rohrmann, Michael Schallies, Horst Schecker, Jürgen Storrer, Manuela Welzel, Albert Zeyer.

2007, 231 S.

Der naturwissenschaftliche Unterricht ist im Aufbruch. In den Schulvergleichsstudien wurde für diesen Bereich ein Leistungsproblem aufgedeckt. Aus anderen Studien wissen wir von einem Identifikationsproblem: Schülerinnen und Schüler wählen die Naturwissenschaften ab, sobald man ihnen Gelegenheit dazu gibt. Gründe genug, Ursachenforschung zu betreiben, die Frage zu stellen, welcher Stellenwert der naturwissenschaftlichen Bildung in unserer Gesellschaft beigemessen wird und nach Möglichkeiten zu suchen, die naturwissenschaftliche Bildung zu stärken.

Die Kultusministerkonferenz versucht mit der Einführung von Bildungsstandards, Impulse für eine Qualitätsentwicklung im naturwissenschaftlichen Unterricht zu setzen.

Ausgewählte Expertinnen und Experten aus dem Bereich der Aus- und Weiterbildung von Lehrerinnen und Lehrern in den Naturwissenschaften gehen in diesem Band mit neuen Perspektiven und Erkenntnissen der skizzierten Problematik nach.

Band 49: Markus Geiger

Pfarrer Paul Schneider und seine Rezeptionsgeschichte

2007, 220 S.

Das Gedenken an Pfarrer Paul Schneider (1897–1939) verlief im Nachkriegsdeutschland in unterschiedlichen Formen und Intensionen. Das persönliche, staatliche und kirchliche Erinnern an den „Prediger von Buchenwald“, der im KZ Buchenwald ermordet wurde, zeigt dieses Buch. Einen Schwerpunkt setzt der Autor auf den Vergleich der Rezeptionsgeschichte Paul Schneiders in der ehemaligen DDR und in der Bundesrepublik. Der zweite Teil der Arbeit behandelt unter anderem Paul Schneider in der Literatur und in der wissenschaftlichen Diskussion, das „Entdecken“ von Paul Schneider in der katholischen Kirche, eine Betrachtung über Martin Sommer, den „Henker von Buchenwald“ und eine Würdigung von Margarete Schneider (1904–2002), der Frau von Paul Schneider.

Band 50: Michael Schallies und Jürgen Dumke

Lebenslanges Lernen

Ein Forschungs- und Entwicklungsprojekt zur Stärkung von Eigenverantwortung und Selbststeuerung im Rahmen schulischen Lernens

2007, 187 S.

Die Notwendigkeit Lebenslangen Lernens betrifft jeden Einzelnen in einer sich ständig verändernden Gesellschaft. In einem weit höheren Maß als bisher werden Urteilsvermögen und Kritikfähigkeit, Flexibilität und Eigeninitiative zur Bewältigung der Anforderungen in der Lebens- und Arbeitswelt erforderlich. Es ist klar, dass die Lehr- und Lernmethoden in den allgemein bildenden Schulen sich gegenüber einem „Vorarbeitermodell des Unterrichts“ erheblich und grundlegend ändern müssen.

In einem von der Bund-Länder-Kommission für Bildungsplanung und Forschungsförderung geförderten Projekt wurden in konkreten Projektarbeiten an Schulen folgende Fragestellungen in einem Forschungs- und Entwicklungsprojekt untersucht:

- Wie kann die Eigenverantwortung der Lernenden für ihren eigenen Lernprozess und die Selbststeuerung des Lernens gestärkt werden?
- Welche neu entwickelten Lehr- und Lernarrangements sind dieser Zielsetzung förderlich?

Von besonderer Bedeutung in diesem Zusammenhang war das Lehr-Lern-Instrument „Portfolio“. Es hat sich als besonders geeignet erwiesen, die Veränderungsprozesse in den Schulen einzuleiten, zu unterstützen und gleichzeitig Einblicke in die individuellen Voraussetzungen für Selbststeuerung des Lernens und deren Veränderung durch konkrete Projektarbeiten zu untersuchen.

Band 51: Jürgen Schönbeck (Hrsg.)

Mosaiksteine moderner Schulmathematik

Werner Ast zum 65. Geburtstag

Mit Beiträgen von Albrecht Abele, Christiane Benz, Daniel Bienia, Andrea Einig, Andreas Filler, Michael Gieding, Bernd Hafenbrak, Gerhard Hofsäß, Sabine Kaufmann, Jens Holger Lorenz, Reinhard Mauve, Reinhard Oldenburg, Birte Poelstra, Charlotte Schönbeck, Jürgen Schönbeck, Christoph Selter, Horst Struve, Volker Ulm, Klaus Volkert.

2008, 277 S.

Fast unbemerkt von der Öffentlichkeit findet seit einigen Jahren in der Mathematikdidaktik ein Paradigmenwandel statt, der auf allen Stufen des Mathematikunterrichts bisher unbekannte Perspektiven eröffnet. Er zeigt sich in der methodischen Neugestaltung traditioneller Inhalte und in der Aufnahme innovativer Unterrichtsgegenstände in das Curriculum – verbunden mit einer deutlichen Hinwendung zu größerer Selbsttätigkeit der Schüler und der Entwicklung schülergemäßer Problemlösestrategien. Er wird offenkundig an einem verstärkten Einsatz neuer technischer Medien und an fachübergreifenden und fächerverbindenden Fragestellungen. Er benutzt vielfältige und neuartige Methoden der Lernerfolgskontrolle und der Leistungsmessung – und er besinnt sich auf die historische Entwicklung von Mathematik und auf ihren kulturgeschichtlichen Einfluss.

In diesem Band stellen 19 Autorinnen und Autoren unterschiedliche mathematikdidaktische Entwürfe vor, die solche für den Unterricht relevante Veränderungen beschreiben. Die ausgewählten Themen aus Arithmetik und Algebra, Geometrie und Analysis, Informatik und Geschichte werden dabei um die Schlüsselworte *kindgemäßer Anfangsunterricht – problemorientierte Elementarmathematik – computergestützte Anwendungen – historische Wandlungen* gruppiert; sie fügen sich in dieser Breite ein in ein buntes Mosaik moderner Schulmathematik.

**Weitere Literatur zur Didaktik der Mathematik
in der Schriftenreihe der Pädagogischen Hochschule Heidelberg**

Schönbeck, Jürgen / Struve, Horst / Volkert, Klaus (Hrsg.) (1994). *Der Wandel im Lehren und Lernen von Mathematik*. Schriftenreihe der Pädagogischen Hochschule Heidelberg. Bd. 18. 274 S.

Schönbeck, Jürgen (Hrsg.) (1997). *Facetten der Mathematikdidaktik*. Schriftenreihe der Pädagogischen Hochschule Heidelberg. Bd. 30. 250 S.

Abele, Albrecht / Selter, Christoph (Hrsg.) (2002). *Mathematikunterricht zwischen Tradition und Innovation*. Schriftenreihe der Pädagogischen Hochschule Heidelberg. Bd. 39. 386 S.

